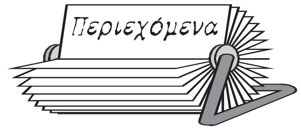

Περιεχόμενα

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Τεύχος 2ο, Οκτώβριος 2003

Ιδιοκτήτης:
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,
Παράρτημα Ημαθίας

Εκδότης:
Παπαδόπουλος Κώστας

Υπεύθυνος σύνταξης:
Ιωσηφίδης Νίκος

Συντακτική Επιτροπή:
Απλακίδης Γιάννης
Ζανταρίδης Νίκος
Ιωσηφίδης Νίκος
Μιχαηλίδου Γεωργία
Παπαδόπουλος Κώστας
Παπαδόπουλος Μανώλης
Τσιπρόπουλος Αντώνης

Επιμέλεια μη μαθηματικών κειμένων:
Μόσχου Έλενα, Φιλόλογος

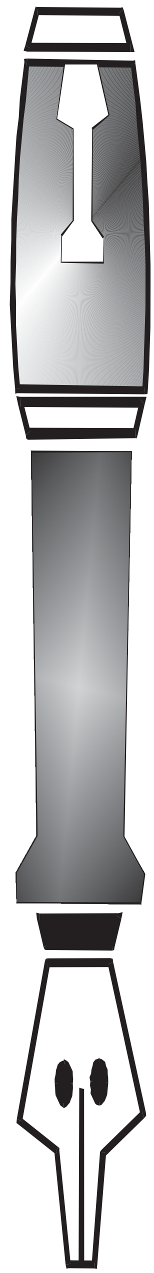
Ηλεκτρονική στοιχειοθεσία:
Ρίζος Γιώργος, Μαθηματικός, Κέρκυρα
Τηλ. και fax: 26610 33243

Εξώφυλλο:
Παπαδόπουλος Μανώλης,
Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

Εκτύπωση:
Τσιαρτσιάνης Αθανάσιος, Θεσσαλονίκη
Τηλ. 2310 - 682080

Διεύθυνση:
Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία,
Παράρτημα Ημαθίας
Κουντουριώτη 8, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ
Τηλ και fax: 23310-67107

Διεύθυνση επικοινωνίας,
αποστολή εργασιών:
Ιωσηφίδης Νίκος,
Τρεμπεσίνας 6, 591 00 ΒΕΡΟΙΑ
Τηλ. 23310-20143 και 23310-29504
Fax: 23310-20408
e-mail: iossifid@otenet.gr



ΕΙΔΗΣΕΙΣ, ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ, ΝΕΑ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ

ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΩΝ

Τη Δευτέρα 30 Ιουνίου 2003 στη βιβλιοθήκη του 5ου Ε. Λ. Βεροίας πραγματοποιήθηκε με επιτυχία Ημερίδα Μαθηματικών που διοργάνωσε το παράρτημα Ημαθίας της Ε.Μ.Ε.. Η ημερίδα είχε ως βασικό θέμα της τη θεματοδοσία στα Μαθηματικά των Πανελληνίων Εξετάσεων. Αφορμή για τη διεξαγωγή της αποτέλεσε το θέμα 4γ των εξετάσεων Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου του 2003.

Στην ημερίδα παρευρέθηκαν: ο **Γ. Δημάκος**, Αντιπρόεδρος της Ε.Μ.Ε., ο **Γ. Τυρλής**, προπονητής της ομάδας διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε. και πρώην Γ. Γραμματέας της, ο **Σ. Λουρίδας**, επίσης προπονητής της ομάδας διαγωνισμών και η **Ε. Μήτσιου**, προπονήτρια των ομάδων διαγωνισμών και συγγραφέας.

Στην αρχή της ημερίδας παρουσίασε η Ε. Μήτσιου την εργασία της: "*Ποια είναι τα χαρακτηριστικά μιας καλής θεματοδοσίας*", δίνοντας τα κριτήρια για μια καλή θεματοδοσία˙ τόνισε ότι και κατά το παρελθόν δόθηκαν θέματα με πρόχειρο και βεβιασμένο τρόπο, αρκετά εκ των οποίων περιείχαν επιστημονικά λάθη. Στη συνέχεια εστίασε την κριτική της στο λαθεμένο θέμα 4γ, παραθέτοντας συγκεκριμένα θεωρητικά παραδείγματα. Άσκησε κατόπιν κριτική για το γεγονός ότι η Ε.Μ.Ε. έπρεπε έγκαιρα να πάρει θέση για το θέμα αυτό.

Στην ομιλία του ο Γ. Δημάκος ανέφερε ότι στην κριτική που γίνεται στην Ε.Μ.Ε. υπάρχει το στοιχείο της υπερβολής. Η Ε.Μ.Ε., είπε, σε δύο ανακοινώσεις της τόνισε την ασυμβατότητα των θεμάτων με τα σχολικά βιβλία, εκτίμησε στη στάση της το συμφέρον των μαθητών και τη νηφάλια διεξαγωγή των εξετάσεων. Είπε ακόμη ότι υπήρχαν θεωρητικές τοποθετήσεις πανεπιστημιακών, οι οποίοι είχαν διαφορετική άποψη στο επιστημονικό μέρος από όσους ισχυρίζονταν ότι με οποιοδήποτε ορισμό το 4γ ήταν λάθος. Στο τέλος έκανε μια σειρά προτάσεων, οι οποίες, όπως είπε, θα μπορούσαν να διασφαλίσουν την επιστημονική εγκυρότητα των εξετάσεων και να αποτρέψουν την εμφάνιση παρόμοιων προβλημάτων.

Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν οι συνάδελφοι Γ. Τυρλής και Σ. Λουρίδας, οι οποίοι τόνισαν ότι οι όποιες κριτικές της μαθηματικής κοινότητας πρέπει να έχουν νηφάλιο και συναδελφικό χαρακτήρα. Ανέφεραν ότι συμμερίζονται τις αγωνίες και τις ανησυχίες των συναδέλφων, ενώ κατέθεσαν και αυτοί προτάσεις, τονίζοντας την ανάγκη της συμμετοχής στις επιτροπές θεματοδοσίας μαχόμενων μαθηματικών.

Στο τέλος, μετά τις ερωτήσεις, ακολούθησαν τοποθετήσεις των συναδέλφων μαθηματικών. Στις τοποθετήσεις των συναδέλφων έγιναν συγκεκριμένες προτάσεις, ασκήθηκε κριτική, ενώ παράλληλα τονίσθηκε ότι η κριτική αυτή δεν πρέπει να έχει "πολεμικό χαρακτήρα" και να υπερβαίνει τα όρια. Όλες οι προτάσεις που υποβλήθηκαν, καθώς και οι κριτικές παρατηρήσεις θα καταγραφούν και θα δοθούν στην Ε.Μ.Ε. και στο ΥΠ.Ε.Π.Θ.

Γενικά ήταν μια πολύ καλή εκδήλωση, που παρά τις διαφορές απόψεων που υπήρξαν, κινήθηκε σε συναδελφικό κλίμα.

Η ΒΕΡΟΙΑ ΚΑΙ Η ΗΜΑΘΙΑ ΖΟΥΝ ΤΟΝ ΠΑΛΜΟ ΤΟΥ ΣΥΝΕΔΡΙΟΥ

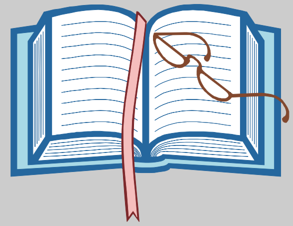
Η κυκλοφορία του 2ου τεύχους του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ συμπίπτει με τη διεξαγωγή του **20ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας**. Όλα είναι έτοιμα και κατάλληλα προετοιμασμένα για να αποτελέσει το 20ο Συνέδριο ένα ιδιαίτερα μεγάλο και σημαντικό πνευματικό γεγονός.

Η Τοπική Οργανωτική Επιτροπή και όλοι οι συνάδελφοι είναι βέβαιοι ότι έπραξαν στο ακέραιο το καθήκον τους για να φανεί το Παράρτημα Ημαθίας αντάξιο αυτής της μεγάλης ευθύνης. Στις **7, 8 και 9 Νοέμβρη** η Βέροια θα υποδεχτεί περισσότερους από 1.200 συνέδρους. Οι σύνεδροι θα γνωρίσουν την Ημαθία, την ιστορία της, τους αρχαιολογικούς της θησαυρούς, τις φυσικές της ομορφιές, αλλά πάνω απ' όλα τους ανθρώπους της. Είμαστε βέβαιοι ότι, όταν θα κλείνει τις εργασίες του το 20ο Συνέδριο, όλοι αυτοί οι άνθρωποι, που θα φύγουν από τη Βέροια θα γίνουν οι καλύτεροι πρεσβευτές μας.

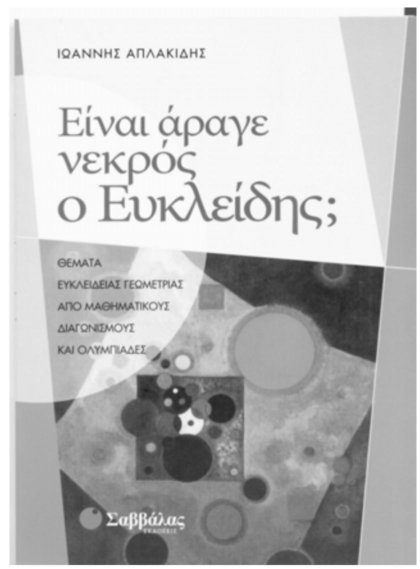
Στην προσπάθεια μας αυτή δεν είμαστε μόνοι. Μας βοήθησαν οι αρχές της Ημαθίας, Δημόσια πρόσωπα, μαζικοί φορείς, αλλά και απλοί άνθρωποι. **Τους ευχαριστούμε όλους**.

Κώστας Παπαδόπουλος
Πρόεδρος της Δ.Ε.
του Παραρτήματος Ημαθίας
της Ε.Μ.Ε.

Βιβλιο-παρουσίαση



ΓΙΑΝΝΗ ΑΠΛΑΚΙΔΗ:
Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;



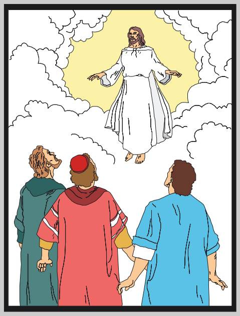
Πρόσφατα κυκλοφόρησε από τις εκδόσεις Σαββάλα το βιβλίο του συναδέλφου και μέλους της Δ.Ε. του Παραρτήματος Ημαθίας της Ε.Μ.Ε. Γιάννη Απλακίδη με τίτλο: «***Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;***».

Το βιβλίο περιέχει 150 πρωτότυπα θέματα Γεωμετρίας και τις λύσεις τους. Τα περισσότερα από αυτά έχουν τεθεί σε διεθνείς διαγωνισμούς Μαθηματικών και αντιμετωπίζονται με την ύλη της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου. Η επιλογή των θεμάτων έγινε με βάση την κομψότητα και όχι τη δυσκολία τους. Γι' αυτό υπάρχουν τρία επίπεδα δυσκολίας Α΄, Β΄ και Γ΄ ομάδα. Κάποιες από τις ασκήσεις είναι γνωστές, (δηλ. περιέχονται σε βιβλία), συμπεριλήφθησαν όμως στο βιβλίο για το πρωτότυπο της λύσης τους.

Το βιβλίο απευθύνεται στους μαθητές της Β΄ Λυκείου πού θέλουν να απεγκλωβιστούν από τη στενή και στείρα μεθοδολογία (τυποποίηση λύσεων) αλλά και στους συναδέλφους μαθηματικούς που θέλουν να δώσουν στους μαθητές τους νέους τρόπους σκέψης, πιο δυνατούς και πιο ελεύθερους.

Η Συντακτική Επιτροπή του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ συγχαίρει το συνάδελφο Γιάννη Απλακίδη για την πολύ ωραία δουλειά του και εύχεται στο μέλλον και άλλοι συνάδελφοι να παρουσιάσουν τη δουλειά τους σε συγγραφικό επίπεδο.

Από τις προτεινόμενες για λύση ασκήσεις του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, σ' αυτό το τεύχος, οι ασκήσεις: **Β40, Β41, Β42, Β43, ✶Β46, ✶Β47, ✶Β48, ✶Β49, ✶Β50,** περιέχονται στο βιβλίο του Γιάννη Απλακίδη.



Είναι ο Θεός γεωμέτρης;

Ιωάννης Σταμέλος
Μαθηματικός, Αγ. Νικόλαος Κρήτης
Istam@agn.forthnet.gr

Ο μαθηματικός Ian Stewart είναι γνωστός κυρίως για τις εκλαϊκεύσεις δύσκολων μαθηματικών θεμάτων. Στο πιο γνωστό έργο του "Παίζει ο Θεός ζάρια;"[1], τίτλος δανεισμένος από το διάσημο ερώτημα του Αϊνστάιν, επιχείρησε να εκλαϊκεύσει τη θεωρία του χάους. Δηλαδή το πως φυσικά φαινόμενα ή συστήματα (όπως οι υπολογιστές) με "τέλεια" αιτιοκρατική συμπεριφορά μπορούν να συμπεριφέρονται απρόβλεπτα. Ο Stewart έχει γράψει πολλά βιβλία και έχει τιμηθεί με το βραβείο Faraday για την ικανότητά να μεταδίδει τη γνώση με απλό και κατανοητό τρόπο.

Το βιβλίο "*Είναι ο Θεός γεωμέτρης;*" με υπότιτλο "*η τρομερή συμμετρία*" έγραψε με τον μαθηματικό Martin Golubitsky, ο οποίος είναι ειδικευμένος στα μαθηματικά των συμμετριών.

Ο Ν. Γκέτζ, στο Θεώρημα του παπαγάλου, ισχυρίζεται ότι οι μαθηματικές θεωρίες χρειάζονται ωραίους μύθους για να προκαλέσουν το ενδιαφέρον του ευρύτερου κοινού. Οι συγγραφείς του "Είναι ο Θεός γεωμέτρης;" επιχειρούν να κερδίσουν την τελική εντύπωση κλείνοντας με ένα ευφυολόγημα. Στο "Παίζει ο Θεός ζάρια;" ο Stewart κλείνει με το: Αν ο Θεός έπαιζε ζάρια σίγουρα θα κέρδιζε. Εδώ με το: Αν ο Θεός είναι γεωμέτρης σίγουρα είναι πολύ καλύτερος από εμάς.

Ο κεντρικός τίτλος του βιβλίου σε εμάς τους έλληνες προκαλεί άμεσα καταφατική απάντηση αφού παραπέμπει στο πολύ γνωστό μας από τα σχολεία ρητό –μνημονικό κανόνα για τα ψηφία του π– "ἀεῖ ὁ Θεὸς ὁ μέγας γεωμετρεῖ". Όμως το θέμα του είναι η συμμετρία στα μαθηματικά, η οποία αποτελεί ένα από τα κλασικά μοτίβα τους. Ως όρος η συμμετρία επίσης απαντάται και στη φιλοσοφία, τον πολιτισμό και την τέχνη. Όμως στα μαθηματικά φαίνεται να δημιουργεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον και από το γεγονός ότι το σύνολο των έμβιων όντων μας παρουσιάζεται σε μια ποικιλία συμμετρικών μορφών.

[1] Το βιβλίο κυκλοφορεί στα ελληνικά από τις εκδόσεις "Κωσταράκη"

Στον πρόλογο του βιβλίου οι συγγραφείς δίνοντας το στίγμα του βιβλίου επεξηγούν ότι δεν αντιμετωπίζουν τη συμμετρία σαν ένα στατικό φαινόμενο, όπως αυτό μπορεί να γίνει με χαρακτηρισμούς για το αν ένα αντικείμενο έχει ή δεν έχει συμμετρία. Επιχειρούν, ισχυρίζονται, να τονίσουν "τις δυναμικές διαδικασίες στις οποίες η συμμετρία μπορεί να καταστραφεί είτε να δημιουργηθεί" και "είναι κάτι περισσότερο από μια άσκηση σ' αυτό που συνηθίζουμε να λέμε Φυσική Φιλοσοφία".

Τα διάφορα σχέδια, μοτίβα και σχήματα στη φύση αποτέλεσαν πηγή έμπνευσης, δέους αλλά και επιστημονικού προβληματισμού. Με παραδείγματα από τις ραβδώσεις της τίγρης, τα στίγματα της λεοπάρδαλης, τον πλάγιο τρόπο πτήσης των αεροπλάνων, τα σχέδια στην υφαντουργία, το περπάτημα μερικών ζώων κ.α. προσπαθούν να τεκμηριώσουν το "σπάσιμο της συμμετρίας" όταν συμμετρικά αίτια προκαλούν ασύμμετρα αποτελέσματα.

Το βιβλίο αποτελείται από δέκα κεφάλαια. Στο τελευταίο που έχει τίτλο "Τελικά είναι;" (υπονοώντας, ο Θεός γεωμέτρης) σημειώνουν: «Αποτελούν άραγε οι συμμετρίες εσωτερικά μορφώματα (ο μεταφραστής αποδίδει έτσι τον όρο pattern, το πρότυπο, για να χαρακτηρίσει τα διάφορα γεωμετρικά "πρότυπα") της φύσης ή είναι κατασκευάσματα της ανθρώπινης αντίληψης»;

Το αιώνιο ερώτημα για τα μαθηματικά: Είναι αυτά καθαρό δημιούργημα της ανθρώπινης νόησης ή αντανακλάται σ' αυτά η εικόνα του κόσμου επειδή τα χαρακτηριστικά του είναι ενσωματωμένα στον ανθρώπινο εγκέφαλο; Στο βιβλίο υποστηρίζεται πως "*δεν υπάρχει μια καθολική απάντηση. Άλλοτε φαίνεται να είναι το ένα άλλοτε το άλλο*".

"Οι άνθρωποι εξελίχθησαν επιβιώνοντας σ' έναν πολύπλοκο και συχνά εχθρικό κόσμο. Γι' αυτό και οι αισθήσεις μας επηρεάζονται από τον τρόπο που αντιλαμβάνονται συγκεκριμένα είδη πραγμάτων". Όταν κλείνουμε ασυνείδητα το μάτι σε κάτι που κινείται γρήγορα πάνω του δεν περιμένουμε να δούμε τι ακριβώς είναι αυτό. Το ίδιο όταν καθόμαστε πίσω από τζάμι και κάποιος από την άλλη μεριά προσπαθεί να μας χτυπήσει στο πρόσωπο. "*Το νοητικό μας κύκλωμα, έχει ενσωματωμένες παραμορφώσεις της αντίληψης. Ο κόσμος που βλέπουμε δεν είναι απαραίτητα ο κόσμος με την πραγματική του μορφή*". Μια μέλισσα ανιχνεύοντας την υπεριώδη ακτινοβολία, βλέπει πράγματα τα οποία δεν βλέπουμε εμείς. Ομοίως τα αποδημητικά πουλιά τα οποία είναι ευαίσθητα στο γήινο μαγνητικό πεδίο "*γνωρίζουν*" την κατεύθυνση προς την οποία θα μεταναστεύσουν. Όμως "*οι άνθρωποι, που δεν έχουν αυτή την αντιληπτική ικανότητα παρατηρούν με θαυμασμό αυτό το γεγονός*".

Είναι γνωστό ότι το φυσικό περιβάλλον είναι πάρα πολύ πολύπλοκο. Ούτε τέλεια τετράγωνα υπάρχουν ούτε τέλειες σφαίρες, ούτε ιδανικά πειράματα μπορούν να γίνουν. Προκειμένου όμως να το αντιμετωπίσουμε αποτελεσματικά «*τείνουμε να το "στοιβάζουμε" σε βολικές κατηγορίες, ελαττώνοντας το ποσό των πληροφοριών που χρειαζόμαστε για να λειτουργήσου-*

με αποτελεσματικά μέσα σ' αυτό. Αναρίθμητα είδη φυτών συνοψίζονται σε μια μόνη έννοια: το "δέντρο" […] Η μέθοδος δε δουλεύει πάντα […] αλλά βελτιώνεται όσο την φιλτράρουμε και την θέτουμε πάνω σε βαθύτερες και θεμελιώδεις ιδιότητες».

Γνωρίζοντας, οι συγγραφείς, ότι η αντίληψη του αμύητου κινείται σε δυο καταστάσεις, υποβάλλεται σε διλήμματα, την προκαλούν και την εντείνουν. Η απάντηση που δίνουν στη συνέχεια είναι έξω από το ερώτημα-δίλημμα: "*Μα επιτέλους, είναι ή δεν είναι;*" (ο Θεός γεωμέτρης). Στο τελικό σημείωμα του βιβλίου γράφουν: "*Ερχόμαστε σε αμηχανία όταν οι άνθρωποι ζητούν απαντήσεις. Παρουσιάσαμε τις ενδείξεις. Θα προτιμούσαμε να σχηματίζατε τη δική σας γνώμη*". Όμως παραθέτουν και τη δική τους: "*Ο Γεωμέτρης Θεός είναι πανθεϊστικός και υιοθετεί οποιοδήποτε κλάδο της γεωμετρίας αρμόζει στις περιστάσεις. Χρησιμοποιεί την Ευκλείδεια γεωμετρία για να δώσει συμμετρία στη σωματική μας μορφή, τη συμβατική γεωμετρία για να απεικονίσει τα οπτικά ερεθίσματα στον εγκέφαλο, τη διαφορική γεωμετρία για να τεντώσει τις μυϊκές ίνες μέσω της καρδιάς μας, τη γεωμετρία του Riemann για να καμπυλώσει το σύμπαν και να δημιουργήσει τη βαρύτητα, τη συμπλεκτική γεωμετρία για να υπάρξει το φως*".

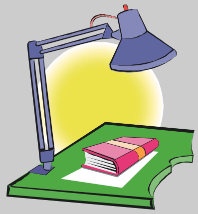
Οι ρίζες της γεωμετρίας βρίσκονται σε πρακτικά προβλήματα, όπως η μέτρηση της γης ή η ναυσιπλοΐα, οι κορυφές της όμως είναι στον Νευτώνειο χωρόχρονο και τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.

«*Η φαινομενικά απλή παρατήρηση ότι "μερικές υποθέσεις" συνεπάγονται τα "ίδια συμπεράσματα" είναι πολύ σημαντική και βοηθά στο να εξηγήσουμε γιατί τα μαθηματικά μας επιστρέφουν περισσότερα απ' ότι τους δίνουμε*». Μας επιτρέπουν να προβλέπουμε και να αναμένουμε τα επακόλουθα των υποθέσεών που κάναμε.

Το βιβλίο έχει εντυπωσιακό εξώφυλλο από το θέαμα που δημιουργείται όταν μια σταγόνα πέσει στην επιφάνεια ενός υγρού. Έχει σχήμα 14×20 και αποτελείται από 382 σελίδες. Στα ελληνικά κυκλοφόρησε το 1995 από τις εκδόσεις Π. Τραυλός (διαβάσαμε την $5^{η}$ έκδοση), σε μετάφραση του μαθηματικού κ. Κ. Σαμαρά και επιστημονική επιμέλεια του κ. Μω. Α. Μπουντουρίδη.

Στο τέλος του παρατίθεται σχετική βιβλιογραφία και περιλαμβάνει δυο παραρτήματα με προγράμματα για υπολογιστή προκειμένου ο αναγνώστης να δημιουργήσει στον υπολογιστή του τις εικόνων του βιβλίου. Ακόμα υπάρχει εύχρηστο ευρετήριο ονομάτων και όρων.

Στο βιβλίο περιέχονται αρκετά ιστορικά στοιχεία και αναφορές στους Πλάτωνα, Πυθαγόρα, Ευκλείδη κ.α., αλλά και στοιχεία από τη θεωρία ομάδων και τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Τελικά σε ποιους απευθύνεται; Οι μαθητές και οι απόφοιτοι Λυκείου θα βρουν εντυπωσιακά παραδείγματα αλλά κυρίως θα καταστούν κοινωνοί του τρόπου σκέψης που αναπτύσσεται στα υψηλότερα τμήματα της μαθηματικής επιστήμης.



Το νέο αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών του Γυμνασίου.

Μία κριτική θεώρηση

Γιώργος Ρίζος
Μαθηματικός, Κέρκυρα

Ιστορικό

Στις αρχές του 2003 δημοσιεύτηκαν τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών για όλα τα μαθήματα για Δημοτικά και Γυμνάσια, μετά από μακρόχρονη προετοιμασία, η οποία δυστυχώς δεν είχε στοιχεία διαφάνειας. Θα μπορούσαν π.χ. οι συντάκτες των κειμένων να δημοσιοποιήσουν –πράγμα πανεύκολο σήμερα, κυρίως μέσω του διαδικτύου– κάποιους βασικούς άξονες, να ζητήσουν (δημόσια) γνώμες επιστημονικών σωματείων, φορέων, ερευνητών, εκπαιδευτικών και κυρίως όσων επί χρόνια "μάχονται" στις τάξεις, να λάβουν υπόψην τους κάποιες σημαντικές παρατηρήσεις και γενικά η όλη διεργασία να γίνεται στο φως της ημέρας και με τη συμμετοχή των ενδιαφερόμενων.

Δεν αναπτύχθηκε όμως κανένας διάλογος. Υπάρχει μια τάση για απόκρυψη των προθέσεων των επιτροπών, φόβος και απέχθεια για ενημέρωση και ανταλλαγή απόψεων. Ο αείμνηστος Θ. Καζαντζής έλεγε για τις επιτροπές αυτές: "*Έχουν την άποψη ότι όλη η σοφία του κόσμου υπάρχει σε περίμετρο λίγων μέτρων γύρω τους*". Αυτή η μυστικοπάθεια με φοβίζει και με κάνει καχύποπτο και προκατειλλημένο.

Στη συνέχεια προκηρύχθηκε ο διαγωνισμός για την παραγωγή βιβλίων και συνοδευτικών εργαλείων με οδηγό αυτό το Αναλυτικό Πρόγραμμα, δίχως από κανέναν να ζητηθεί να σχολιάσει, να παρέμβει, να αλλάξει έστω και μια άνω τελεία στα κείμενα αυτά.

Το ιστορικό της δημιουργίας Προγραμμάτων Σπουδών επαληθεύει περίτρανα την προηγούμενη διαπίστωση. Επιτροπές δημιουργούνται, αποσύρονται στα σκοτεινά, κατασκευάζουν προγράμματα, οι υπουργοί τα υπογράφουν, δημοσιεύονται ως αμετάκλητοι νόμοι του Κράτους ... και κατόπιν πετιούνται στα σκουπίδια για να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία την επόμενη χρονιά. Ερώτηση αφελής: "Το κόστος όλων αυτών των διεργασιών, ποιος το επιβαρύνεται; Ποιος λογοδοτεί και σε ποιον για τη χρηματοδότηση άχρηστων ενεργειών;

Γνωρίζω ότι κυκλοφόρησαν, χωρίς ποτέ να υλοποιηθούν, Προγράμματα Σπουδών (τουλάχιστον για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου) το 1995, το 1998, οπότε και προκηρύχθηκε διαγωνισμός, στη συνέχεια το 2000 εγκρίθηκε το βιβλίο Α΄ Γυμνασίου του κ. Στ. Μπαλή, πληρώθηκε (δικαίως) με περίπου 20-25(;) εκατομμύρια δραχμές, βγήκαν films, και έμεινε στο ντουλάπι. Είδατε κανέναν να αναλαμβάνει την ευθύνη για αυτήν την πολυέξοδη ανοργανωσιά;

Τέλος, το 2001, παρουσιάστηκε νέο Πρ. Σπουδών, δημοσιεύτηκε στην Εφημερίδα της Κυβέρνησης (αρ. ΦΕΚ 1374, 18-10-2001), το οποίο δίχως καμμία εξήγηση επίσης αναιρέθηκε. Σε πολλές πόλεις έγινε, μετά τη δημοσίευσή του, σε ημερίδες της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας παρουσίασή του και σύγκρισή του με αντίστοιχο πρόγραμμα της Ε.Μ.Ε. Και εδώ όμως δεν κυκλοφόρησαν τα κείμενα (π.χ. στο διαδίκτυο), αλλά η όλη επεξεργασία έγινε από επιτροπές της Ε.Μ.Ε. σχεδόν εν κρυπτώ.

Βέβαια τα πράγματα δεν πρέπει να τα βλέπουμε τόσο απαισιόδοξα. Όπως η φύση παρεμβαίνει και αποκαθιστά τις στρεβλώσεις της ανθρώπινης παρέμβασης, δυστυχώς με βίαιο συνήθως τρόπο, είμαι βέβαιος ότι στην καθημερινή ζωή μέσα στις τάξεις θα αποκατασταθούν και θα προσαρμοστούν στην πραγματικότητα και στις ανάγκες του ελληνικού σχολείου οι όποιες ανεφάρμοστες κατευθύνσεις προωθούνται από τις "ασκήσεις επί χάρτου" του νέου Προγράμματος Σπουδών.

Μερικές επισημάνσεις για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου φιλοδοξώ να παρουσιάσω μ' αυτό το κείμενο. Σέβομαι απόλυτα τις γνώσεις, την προσωπικότητα και την προσπάθεια των (αγνώστων σε μένα) συντακτών του Π.Σ. Οι παρατηρήσεις σκοπό έχουν να συμβάλλουν θετικά στη βελτίωση των προγραμμάτων, στην αντιμετώπιση κάποιων (κατά τη γνώμη μου) αδιεξόδων, γι' αυτό και ας συγχωρηθεί το σκωπτικό μερικές φορές ύφος, που και ως καταλύτης λειτουργεί και τις εντάσεις μειώνει και πιστεύω ότι σήμερα ειδικά μάς είναι απαραίτητο.

Α΄ Γυμνασίου

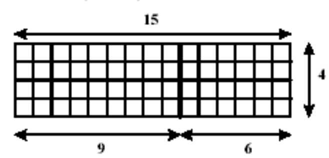
Άλγεβρα

Οι βασικότερες αλλαγές που προβλέπονται στο νέο πρόγραμμα είναι:

Φυσικοί αριθμοί: Διδάσκονται οι πράξεις μόνο μεταξύ φυσικών αριθμών. Δεν εισάγεται η έννοια της μεταβλητής, που μέχρι τώρα υπήρχε (και στο πρόγραμμα 2001 ΦΕΚ 1374 υπήρχε). Η έννοια της μεταβλητής εισάγεται στη Β΄ Γυμνασίου. Όμως η επιμεριστική δίνεται με παράδειγμα-σχήμα, που χρησιμοποιεί από το πρώτο κιόλας βήμα μεταβλητές.

–Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει

$$4\cdot(9+6) = 4\cdot 9+4\cdot 6$$
$$4\cdot(15-6) = 4\cdot 15 - 4\cdot 6$$



και στη συνέχεια με κατάλληλα σχήματα δικαιολογήστε τις ισότητες:

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

και

$$\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$$

- Να σημειώσουμε ότι ο προβλεπόμενος χρόνος είναι ελάχιστος (2 ώρες για πρόσθεση, πολλαπλασιασμό, ιδιότητες και προτεραιότητα και μαζί οι παραπάνω εργασίες).
- Η τέλεια διαίρεση εντάσεται στην παράγραφο της ευκλείδιας (με υπόλοιπο

0). Δεν υπάρχουν: διαιρέσεις και διαιρέσεις δεκαδικών, πηλίκο με προσέγγιση, ούτε παραδείγματα, αφού οι δεκαδικοί διδάσκονται παρακάτω. Μαθαίνουν δηλαδή τα παιδιά για το τι είναι διαίρεση, δίχως να κάνουν διαιρέσεις. Η προτεραιότητα των πράξεων ενσωματώνεται στον πολ/σμο φυσικών.

Το πρώην 2ο Κεφάλαιο: Μετρήσεις μεγεθών φεύγει εντελώς. Κομματιαστά μπαίνει στη Β΄ Γυμνασίου, στα εμβαδά και στην Στερεομετρία (αν διδαχτεί ποτέ).

Κλάσματα, Ποσοστά: Διδάσκονται περίπου όπως μέχρι τώρα. Δίνεται ή έννοια του δεκαδικού ως κλάσμα με παρανομαστή δύναμη του 10. Παρεμβάλεται ενότητα: Μονάδες μέτρησης μεγεθών.

- Στην πρόσθεση κλασμάτων προτείνεται η διπλανή δραστηριότητα:

Με κατάλληλες δραστηριότητες να αντιμετωπιστεί το λάθος, που συνήθως κάνουν οι μαθητές κατά την πρόσθεση κλασμάτων, να προσθέτουν αριθμητές και παρονομαστές. Για παράδειγμα:

–Να βάλετε σε αύξουσα τάξη τα κλάσματα

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5} \quad \text{και} \quad \frac{1+4}{3+5}$$

–Να κάνετε και άλλα τέτοια παραδείγματα και θα διαπιστώσετε ότι

$$\text{αν } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}, \text{ τότε } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} < \frac{\gamma}{\delta}.$$

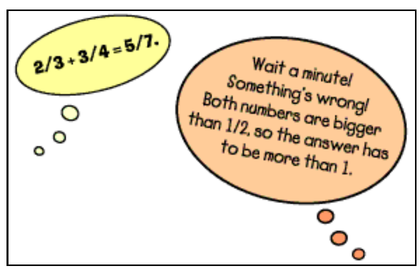
Εδώ εννοεί ότι αφού $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} < \frac{\beta}{\delta}$, δεν μπορεί να είναι $\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$.

Νομίζω ότι με πολύ απλούστερα αντιπαραδείγματα μπορούμε να δείξουμε το λάθος στην πράξη. Με το παράδειγμα αυτό χάνουμε το στόχο μας.

Αν διάλεγε π.χ. άλλα κλάσματα ένας μαθητής, θα πιάναμε κουβέντα τι συμβαίνει σε κάθε περίπτωση;
Ας κάνουμε την πρόσθεση με ομώνυμα κλάσματα και θα δούμε ότι δεν ισχύει η ψευδοϊσότητα. Στο κάτω-κάτω ας τους δείξουμε ότι:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ κι όχι } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}!$$

- Παρόμοιο (ατυχές) παράδειγμα μπορεί να βρει κανείς στο Πρ. Σπουδών της NCTM (Αμερικανικής ένωσης καθηγητών μαθηματικών). Είναι ασφαλώς θεμιτό να υπάρχουν παρόμοια παραδείγματα και ασκήσεις, το συγκεκριμένο όμως δεν είναι πετυχημένο αντιπαράδειγμα.



Ακολουθεί κεφάλαιο με τίτλο: Εξισώσεις και Προβλήματα: Επίλυση με τη βοήθεια ορισμού και προβλήματα. Δεν υπάρχει η έννοια της μεταβλητής.

- Ας ελπίσουμε να μην ξεφύγει σε κάποιον καθηγητή εξίσωση ή πρόβλημα της μορφής: $2 - x = 8$ ή $x + 14 = 8$, γιατί θα πρέπει να ξεγεννήσει τους αρνητικούς ακέραιους πριν την ώρα τους.

Γιατί τέτοια βιασύνη να μπει εδώ αυτό το κεφάλαιο;

- Οι εξισώσεις ζητείται (σωστά) να λύνονται με βάση τον ορισμό των πράξεων. Μαζί και η αx = β. Παρακάτω όμως, στα ανάλογα ποσά, ζητείται να επιλυθεί η εξίσωση: αx = β με τη βοήθεια της τετάρτης αναλόγου: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{x}$.

Στο κεφάλαιο των Αναλόγων Ποσών γίνεται μια προ-παρουσίαση της ύλης των Συναρτήσεων της Β΄ Γυμνασίου, που είναι δυσκολότερα αντιληπτή από τους μαθητές, λόγω ηλικίας, αλλά και επειδή δεν έχουν διδαχθεί τις συναρτήσεις: $y = \alpha \cdot x$ και $y = \alpha/x$.

Δεν δίνει βαρύτητα σε εφαρμογές αναλόγων ποσών (υπάρχον βιβλίο). Δεν δίνει βάρος στις κλίμακες. Δεν αναφέρει μερισμό σε μέρη ανάλογα. Προσθέτει αντιστρόφως ανάλογα ποσά, εφαρμογές παράσταση σημείων (γραφ. παρ. υπερβολής). Όλη αυτή η ύλη θα καλυφθεί ξανά στη Β΄ Γυμνασίου.

- Ζητείται (μεταξύ των άλλων):

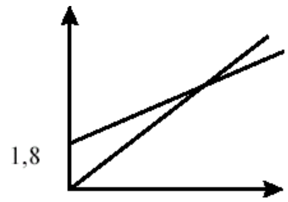
  *Να **συμπληρώνουν** πίνακες ανάλογων ποσών όταν δίνεται ο λόγος τους.*
  *Να **υπολογίζουν** το λόγο δύο αναλόγων ποσών, όταν δίνονται οι πίνακές τους.*
  *Να **χρησιμοποιούν** το ποσοστό ως ειδική περίπτωση συντελεστή αναλογίας.*
  *Να **αναπαριστούν** γραφικά μια σχέση αναλογίας και να οδηγηθούν στη διαπίστωση ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων.*
  *Να **οργανώνουν** τα δεδομένα ενός προβλήματος αναλογικά σε πίνακα και με βάση τον πίνακα να κατασκευάζουν όπου κρίνεται απαραίτητο και τη γραφική παράσταση.*
  *Να **λύνουν** τα προβλήματα εφαρμόζοντας, όπου κρίνεται απαραίτητο τις ιδιότητες των αναλόγων ποσών σε δύο πλαίσια: αριθμητικό και γραφικό.*
  *Να **διακρίνουν** αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.*
  *Να **κατασκευάζουν** πίνακες αντίστοιχων τιμών αντιστρόφως ανάλογων ποσών.*
  *Να **παριστάνουν** με σημεία ενός συστήματος αξόνων τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών και να χαράσσουν την καμπύλη που περνά απ' αυτά.*
  *Να **γνωρίζουν** ότι το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντιστρόφως αναλόγων ποσών είναι σταθερό.*
  *Να **λύνουν** προβλήματα εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των αντιστρόφως ανάλογων ποσών.*

- Και εδώ η ύλη και τα παραδείγματα μοιάζουν πολύ με το πρόγραμμα της NCTM:

Παράδειγμα Πρ. Σπουδών	Παράδειγμα NCTM

Παράδειγμα Πρ. Σπουδών

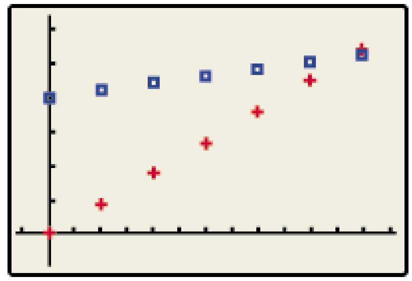
Δυο όμιλοι μπάσκετ προτείνουν τις εξής τιμές:
Α΄ όμιλος: Εγγραφή 1,80€ και 0,30€ ανά παιχνίδι.
Β΄ όμιλος: 0,60€ ανά παιχνίδι.
Σε ποιο όμιλο συμφέρει να εγγραφεί κάποιος;



Παράδειγμα NCTM

No. of minutes	0	10	20	30	40	50	60
Keep-in-Touch	\$20.00	\$21.00	\$22.00	\$23.00	\$24.00	\$25.00	\$26.00
ChitChat	\$0.00	\$4.50	\$9.00	\$13.50	\$18.00	\$22.50	\$27.00

(a)



(b)

Καλό παράδειγμα, όμως είναι υπερβολικό να ζητηθεί στην Α΄ Γυμνασίου, που δεν έχουν διδαχτεί οι συναρτήσεις.

Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί: Μέχρι τώρα περιλαμβανόταν στην ύλη μέχρι πρόσθεση και αφαίρεση ρητών αριθμών, αλλά δεν διδασκόταν, αφού εξάλλου επαναλαμβάνεται στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου.

Τώρα προστίθεται:

Πολλαπλασιασμός ρητών	(2 ώρες)
Διαίρεση ρητών	(2 ώρες)
Δεκαδική μορφή ρητών	(1 ώρα)
Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών.	(4 ώρες)

- Αναφέρεται στο κεφάλαιο αυτό:
  Να γνωρίζουν ότι η διαφορά α-β ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης β+x=α δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία: β+x=α $\Leftrightarrow$ x=α-β
  και παρακάτω:
  Να γνωρίζουν ότι το πηλίκο α:β ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης β·x=α δηλαδή ότι ισχύει η ισοδυναμία: β·x=α $\Leftrightarrow$ x=α:β.
  Πέρα από το ότι επαναλαμβάνεται το κεφάλαιο των εξισώσεων (που νομίζω τεχνητά και λανθασμένα παρεμβλήθηκε στην αρχή της Α΄ Γυμνασίου), άραγε θα μιλήσουμε στους μαθητές σχετικά με το σύμβολο της ισοδυναμίας ή απλά τίθεται εδώ επεξηγηματικά;
- Παρουσιάζεται ο κανόνας γινομένου (+)·(+) = (+), (–)·(+) = (–), κ.λπ. και ζητείται:
  *Να **βρίσκουν** το γινόμενο δυο ρητών αριθμών.*
  *Να **γνωρίζουν** και να εφαρμόζουν τις ιδιότητες του γινομένου ρητών αριθμών.*
  *Να **υπολογίζουν** αριθμητικές παραστάσεις.*

*Να **εφαρμόζουν** την επιμεριστική ιδιότητα.*

Ποιοι; Οι μαθητές Α΄ Γυμνασίου (12-13 ετών), σε 2 (ολογράφως: δύο) ώρες; Η παρουσίαση του κανόνα αυτού είναι το πιο καλό, νομίζω, παράδειγμα για να χαρακτηριστεί η μέθοδος διδασκαλίας μαθητοκεντρική ή φορμαλιστική. Διαβάστε ολόκληρο σχετικό άρθρο του κ. Μπάμπη Τουμάση στα πρακτικά του 3ου Συνεδρίου της ΕΜΕ, που το αναλύει.
Ειλικρινά, γίνεται αξιοπρεπής παρουσιάση μαζί με όλα τα παραπάνω σε 2 ώρες;

- Κατόπιν:
  *Να **διακρίνουν** τους ρητούς που δεν γράφονται ως δεκαδικοί ή περιοδικοί δεκαδικοί.*
  *Να μ**ετατρέπουν** ένα κλάσμα σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό και αντιστρόφως.*
  Αυτά ... σε 1 ώρα.

- Ας πούμε ότι είναι πιθανόν κάποιοι (μαθητές ή καθηγητές) να μην έχουν ακόμα καταρεύσει. Λοιπόν:

  *Να **γνωρίσουν** την έννοια της δύναμης $α^ν$, με α ρητό και ν φυσικό και να μπορούν να **υπολογίζουν** τέτοιες δυνάμεις.*
  *Να **γνωρίζουν** τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη φυσικό και να τις **εφαρμόζουν** στον υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων.*
  *Να **γνωρίζουν** την έννοια της δύναμης $α^{-ν}$, με τον ρητό $α \neq 0$ και ν φυσικό και να **υπολογίζουν** τέτοιες δυνάμεις.*
  *Να **γνωρίζουν** τις ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο και να μπορούν να **υπολογίζουν** αριθμητικές παραστάσεις με δυνάμεις.*
  *Να **γνωρίζουν** ότι:* $\left(\frac{α}{β}\right)^{-ν} = \left(\frac{β}{α}\right)^{ν}$ *και με τη βοήθεια της ισότητας αυτής να μπορούν να **υπολογίζουν** δυνάμεις με βάση κλασματικό αριθμό και εκθέτη αρνητικό ακέραιο.*
  *Να **εκτελούν** τις πράξεις με την προβλεπόμενη προτεραιότητα των πράξεων.*
  *Να **γράφουν** αριθμούς σε τυποποιημένη μορφή, να εκτελούν πράξεις με αυτούς και να τους **συγκρίνουν**.*

  Ξεχάσαν να αναφέρουν και τον κανόνα για το πρόσημο δύναμης με βάση ρητό και εκθέτη άρτιο ή περιττό ή εννοείται ότι περιλαμβάνεται στα παραπάνω;

- Ποιος θα μπορούσε να διδάξει τις δυνάμεις σε φορτωμένους με την προηγούμενη ύλη μαθητές της Α΄ Γυμνασίου σε 4 ώρες και μαζί τις ιδιότητες τους (και με ακέραιο εκθέτη) και την τυποποιημένη μορφή; Αν μπει σε τάξη Α΄ Γυμνασίου να εφαρμόσει αυτό το Πρόγραμμα, οι μαθητές θα φύγουν από τα παράθυρα.

Για το κεφάλαιο αυτό ολόκληρο στη Β΄ Γυμνασίου προβλεπόταν 23 ώρες, που βεβαίως ξεπερνιώταν στην πράξη κατά πολύ. Τώρα προβλέπονται 15 ώρες στην Α΄ Γυμνασίου!

Εδώ είναι το κύριο ερώτημα σχετικά με το Πρόγραμμα Σπουδών:

Θα διδαχθεί στην Α΄ Γυμνασίου αυτή η ύλη ή είναι πλασματικό το Π.Σ.;

Αν "μεταφερθεί" άτυπα στη Β΄ Γυμνασίου, αυτοαναιρείται όλη η φιλοσοφία και η δομή του Προγράμματος, γιατί απλούστατα θα μετακινηθεί και η ύλη της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου αλυσιδωτά. Ποιος ο λόγος λοιπόν να μπει στο σχεδιασμό της Α΄ Γυμνασίου. Ξαναγυρνάμε δηλαδή στο ισχύον Π.Σ. με μόνη αλλαγή τα βιβλία.

Μπορεί όμως να παραμείνει αυτή η ύλη στην Α΄ Γυμνασίου;

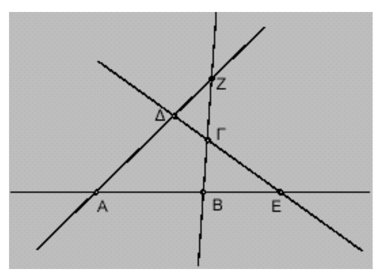
Είναι ικανοί οι μαθητές να κατανοήσουν αυτές τις έννοιες; Ας αναλογιστεί κάθε καθηγητής τον κόπο που χρειάζεται να διδάξει σε "φρέσκους" μαθητές της Β΄ Γυμνασίου στην αρχή της χρονιάς τις πράξεις και τις δυνάμεις των ρητών, καθώς και πόσες διδακτικές ώρες χρειάζεται.

Θα γίνουν άραγε περικοπές στο βάθος (βαθμό δυσκολίας) των ασκήσεων; Τίθεται όμως το ερώτημα: Χρειάζεται ή όχι να μπορούν να εκτελούν οι μαθητές με ευχέρεια πράξεις με ρητούς και δυνάμεις; Θυμηθείτε εδώ ότι στο πρόγραμμα υποβαθμίζεται η εκτέλεση από τους μαθητές απλών διαιρέσεων με φυσικούς και δεκαδικούς; Παράβλεψη; Αν ναι απαράδεκτη. Αν όμως είναι εσκεμμένη επιλογή, που οδηγεί;

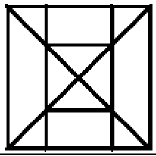
Γεωμετρία:

Το κεφάλαιο που αφορά τις **βασικές γεωμετρικές έννοιες** δεν φαίνεται να έχει αλλάξει ουσιαστικά. Οι ώρες όμως μειώνονται δραστικά: Μέχρι τώρα 29 ώρες (5ο: 14 ώρες , 6ο: 15 ώρες), ενώ με το νέο: περίπου 22 ώρες!

- Ο ορισμός της γωνίας θα είναι ως περιοχή (κοινά σημεία ημιεπιπέδων) ή ως ημιευθείες με κοινή αρχή; Δεν διευκρινίζεται και είναι σημαντικό για να μπορέσει κανείς να απαντήσει σε δραστηριότητες της μορφής: "*Ποιες γωνίες και ποια ευθύγραμμα σχήματα σχηματίζονται από τις παρακάτω ευθείες*".



Για την εξάσκηση των μαθητών να δοθούν ασκήσεις της μορφής:
Να βρείτε στο παρακάτω σχήμα όλες τις εφεξής γωνίες:



Ευτυχώς αποσύρθηκε η διπλανή δραστηριότητα που είχε το προηγούμενο πρόγραμμα, (που έγινε και νόμος του Κράτους)...

- Προστίθεται στη συνέχεια: Μονάδες μέτρησης μήκους, σχέσεις μεταξύ τους κ.λπ.

  Κατόπιν: Επίκεντρη γωνία σε κύκλο, Σχέση επίκεντρης γωνίας και αντιστοίχου τόξου σε 2 ώρες. Σημειώστε ότι τις εγγεγραμμένες θα τις συναντήσουμε στη Γεωμετρία της Β΄ Γυμνασίου.

Στη συνέχεια προστίθεται η **Συμμετρία** (πλήρης) σε 10 ώρες. Η **μεσοκάθετος** εισάγεται εδώ, ως εφαρμογή της αξονικής συμμετρίας.Επίσης οι **παράλληλες ευθείες** που τέμνονται από μια άλλη ευθεία και **οι σχέσεις των γωνιών** τους εισάγονται εδώ, ως εφαρμογή της κεντρικής συμμετρίας. Οι 10 ώρες λοιπόν οφείλουν να καλύψουν και τις παραπάνω βασικότατες έννοιες. Το ερώτημα που τίθεται είναι: Θα διδαχτεί σίγουρα η Συμμετρία στην Α΄ Γυμνασίου; Αν είχε ο μήνας 40 μέρες ίσως... Αν βγει εκτός διδακτέας ύλης, πώς θα δοθεί η **μεσοκάθετος** και οι **εντός εναλλάξ γωνίες**, που πουθενά αλλού δεν διδάσκεται; Θα διδαχτούν με τον πατροπαράδοτο τρόπο; Ξαναγυρνάμε λοιπόν στα ίδια;

Τέλος(!), μαθαίνουμε: **Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια** σε 8 ώρες. Εδώ βρίσκεται και το **άθροισμα γωνιών τριγώνου**. Αν δεν προφτάσουμε, θα το μάθουμε στη σελίδα 83 της Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου. Μέχρι τότε, ποιος θα μου πει πώς θα διδάξουμε π.χ. τριγωνομετρία στη Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου; Αφού φτάσαμε ως εδώ, μας είναι παιγνιδάκι να διδάξουμε: *Παραλληλόγραμμο, Ορθογώνιο. Ρόμβο, Τετράγωνο, Τραπέζιο, Ισοσκελές τραπέζιο και Ιδιότητες αυτών*, σε 4 ώρες, με δραστηριότητες στις οποίες θα γίνεται χρήση συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο.

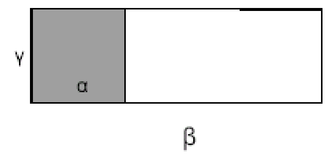
Β΄ Γυμνασίου

Ξεκινά με 2 ώρες **επανάληψη** και κατευθείαν πάει στις **εξισώσεις-ανισώσεις**. Εδώ εισάγεται και η έννοια της μεταβλητής, επαναλαμβάνεται η διαδικασία απαλειφής παρενθέσεων, αναγωγής ομοίων όρων, επιμεριστική ιδιότητα, αλλά ... σε 1 ώρα!

- Το παράδειγμα με το διπλανό σχήμα για την συνεπαγωγή:
  Αν $α < β$ και $γ > 0$, τότε $α·γ < β·γ$ νομίζω ότι μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα.

  Πώς θα δικαιολογηθεί η διαίρεση ή η περίπτωση $γ < 0$;

Το κεφάλαιο των **Πραγματικών αριθμών** μένει όπως έχει. Ξέχασαν να σημειώσουν ώρες για τα γεωμετρικά προβλήματα (περίμετροι, εμβαδά) με το Πυθαγόρειο, άρα πάνε πακέτο με άρρητους, πραγματικούς, παράσταση σε άξονες, όλα μαζί σε 2 ώρες!

> Με κατάλληλα παραστατικά μοντέλα να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι:
>
> Αν $α < β$, τότε $α \pm γ < β \pm γ$
>
> Αν $α<β$ και $γ>0$, τότε $αγ<βγ$ & $\frac{α}{γ}<\frac{β}{γ}$
>
> Αν $α<β$ και $γ<0$, τότε $αγ>βγ$ & $\frac{α}{γ}>\frac{β}{γ}$
>
> Για παράδειγμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω σχήμα για την απόδειξη της δεύτερης ανισότητας:
>
> 
>

Φεύγει η ενότητα "Συντεταγμένες στο επίπεδο", που πάει στις "Συναρτήσεις". Από το κεφάλαιο των **Συναρτήσεων** φεύγουν οι εφαρμογές αναλόγων ποσών (κλίμακες, χάρτες κ.λπ.)

Στη **Στατιστική**, που μεταφέρεται όλη εδώ από τη Γ΄ Γυμνασίου, αναφέρεται στους τίτλους και η **διασπορά**, δίχως όμως κανέναν άλλο στοιχείο, π.χ. σε πόσο βάθος θα διδαχθεί (ομαδοποιημένη, διακριτή κ.λπ.). Επειδή όμως υπάρχει αναφορά στο κείμενο του M. Gardner "*Ο απατηλός μέσος όρος*", πιθανόν να χρειαστεί να προχωρήσουμε σε βάθος.

> Για να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι οι κατανομές με την ίδια διάμεσο ή μέση τιμή μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές, μπορούν να δοθούν δραστηριότητες, όπως π.χ.:
>
> Να μελετηθούν αρχικά οι αποδοχές όλων των υπαλλήλων μιας μεγάλης επιχείρησης και στη συνέχεια οι αποδοχές όλων των υπαλλήλων της επιχείρησης, πλην των στελεχών της, και να εξαχθούν συμπεράσματα που να αφορούν τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

- Επίσης, προβλέπεται πρώτα μάθουν να κατασκευάζουν διαγράμματα, ραβδογράμματα κ.λπ. με τα δεδομένα πινάκων και στη συνέχεια διδάσκονται τι είναι πίνακας συχνοτήτων!

Στην **Τριγωνομετρία:** Δεν υπάρχει εισαγωγή σχετικά με λόγο ευθυγράμμων τμημάτων, όπως υπήρχε μέχρι τώρα, ή παρουσιάση του σταθερού λόγου π.χ. ύψους- οριζοντίου μήκους σε έναν ανηφορικό δρόμο. Ο ορισμός του λόγου τμημάτων θα δοθεί στη Γ΄ Γυμνασίου. Εδώ εισάγονται κατευθείαν οι ορισμοί:

- Οι διατυπώσεις είναι μονότονες: Πρέπει να **γνωρίζουν** και να **υπολογίζουν**:

*Να **γνωρίζουν** πώς ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας.*
*Να **υπολογίζουν** το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του.*
*Να **υπολογίζουν** το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.*
*Να **γνωρίζουν** ότι δύο γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο και συνημίτονο είναι ίσες και να μπορούν να σχεδιάζουν μια γωνία της οποίας δίνεται το ημίτονο ή το συνημίτονο.*

Εδώ, ας συμπληρώσουμε τον ορισμό: "*δύο **οξείες** γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο και συνημίτονο είναι ίσες*" και "*να σχεδιάζουν μιαν **οξεία** γωνία της οποίας δίνεται το ημίτονο ή το συνημίτονο*", για να ακριβολογούμε.

*Να **γνωρίζουν** πώς μεταβάλλεται το ημίτονο και το συνημίτονο οξείας γωνίας όταν μεταβάλλεται η γωνία.*
*Να **υπολογίζουν** με τη βοήθεια του ημιτόνου και του συνημιτόνου διάφορες αποστάσεις.*
*Να **γνωρίζουν** και να υπολογίζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30°, 45°, 60°.*
*Να **γνωρίζουν** πώς ορίζεται η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.*
*Να **υπολογίζουν** την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του.*
*Να **υπολογίζουν** την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης.*
*Να **σχεδιάζουν** μια γωνία της οποίας δίνεται η εφαπτομένη.*
*Να **γνωρίζουν** πώς μεταβάλλεται η εφαπτομένη οξείας γωνίας, όταν μεταβάλλεται η γωνία.*
*Να **υπολογίζουν** με τη βοήθεια της εφαπτομένης διάφορες αποστάσεις.*

Ο προσφερόμενος χρόνος οδηγεί σε φορμαλιστική παρουσίαση, που έρχεται σε ευθεία αντίθεση με τις κατευθύνσεις περί ανακάλυψης της γνώσης, αυτενέργειας των μαθητών κ.λπ., που αποτελούν τη συνισταμένη των απόψεων των ειδικών της διδακτικής, αλλά αναφέρονται και στην εισαγωγή του Π.Σ...

- Ακολουθούν τα **διανύσματα**, που όλο και κατεβαίνουν τάξεις, οπότε σε λίγο θα τα δούμε και στο Δημοτικό. Δίχως τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό και δίχως συντεταγμένες σε σύστημα αξόνων. Υπάρχει όμως ανάλυση διανύσματος σε κάθετες συνιστώσες.
- Στα **εμβαδά**, προστίθονται οι μονάδες μέτρησεις, δίχως άλλες μεταβολές.

Μέτρηση κύκλου: Κατευθείαν ορισμός εγγεγραμμένης, καθότι η επίκεντρη είχε δοθεί στην Α΄ Γυμνασίου, μην ξαναλέμε τα ίδια... Από τα κανονικά πολύγωνα έφυγε (σωστά νομίζω) ο υπολογισμός πλευράς ν-γώνου κ.λπ.

- Στο εμβαδόν κύκλου ζητείται ως δραστηριότητα να πάρουν έναν κύκλο, να τον χωρίσουν σε όσους πιο πολλούς κυκλικούς τομείς, να τοποθετηθούν δίπλα κ.λπ. Νομίζω, ότι πιο εφικτό είναι να γίνει επίδειξη προετοιμασμένη από τον καθηγητή. Ειλικρινά, να το καταλάβουν: ΔΕΝ προλαβαίνει κανείς να κάνει πράξη στο χρόνο που δίνουν τόσες δραστηριότητες. Θα χάσουμε την ουσία, αν αρχίσουμε χαρτοκοπτική σε τάξη 25-30 μαθητών.

Το κεφάλαιο **Μέτρηση Στερεών** μένει όπως είναι. Βέβαια από 14 ώρες τις κάνουν 13, αλλά δεν πειράζει. Έτσι κι αλλιώς πάντα του πέφτει ο κλήρος να θυσιαστεί στο βωμό του χρόνου (που δεν έχουμε)!

Γ΄ Γυμνασίου

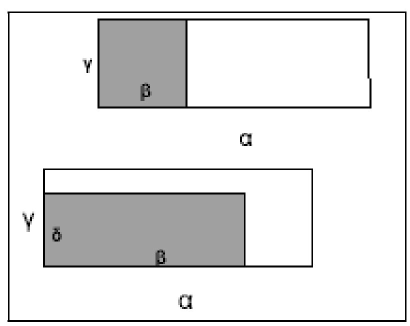
Ξεκινά με **Επανάληψη:** Πράξεις, ιδιότητες, δυνάμεις, ρίζες. Σε 5 ώρες. Στο υπάρχον βιβλίο είχαμε 13 ώρες (μαζί όμως και με ανισότητες, που πάνε τώρα μετα τη Β΄βάθμια εξίσωση).

- Στις δραστηριότητες αναφέρεται: "*Με κατάλληλες δραστηριότητες να γίνει επανάληψη των τεσσάρων πράξεων και των δυνάμεων και των ιδιοτήτων τους. Στη συνέχεια, με κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα θα διαπιστώσουν οι μαθητές ότι ισχύουν οι ιδιότητες των ριζών, τις οποίες και θα αποδείξουν.* ***«Η έννοια της Απόδειξης» (Μαθηματικά, Ιστορία, Γλώσσα, Λογοτεχνία****).* Τι εννοεί: Θα διδαχτεί εδώ η έννοια της απόδειξης;

- Εντάσσονται εδώ οι **Αλγεβρικές Παραστάσεις**, όπως μέχρι τώρα. Προστίθεται μόνο και μια ενότητα με διαίρεση Πολυωνύμων.

Ακολουθεί το κεφάλαιο των **Εξισώσεων**. Φεύγει (σωστά) η εξίσωση 1ου βαθμού με δύο αγνώστους και η γραφική παράσταση της **γραμμικής εξίσωσης**, που όμως αντί να δοθεί με τη συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$, μεταφέρεται παρακάτω, στα συστήματα. Δεν διευκρινίζεται αν παραμένει η διαδικασία συμπλήρωσης τετραγώνου, αναφέρεται όμως η παραγοντοποίηση τριωνύμου. Δεν εξηγείται αν θα χρησιμοποιηθεί Διακρίνουσα για την παραγοντοποίηση.

- Το παράδειγμα με τα σχήματα για τις συνεπαγωγές:
  Αν $\alpha>\beta>0$ και $\gamma>\delta>0$, τότε $\alpha\gamma>\beta\delta$, θα δημιουργήσει περισσότερα ερωτήματα για την διαίρεση ή για την περίπτωση $\gamma<0$.



Ακολουθούν τα **Συστήματα**. Φεύγουν (;) τα συστήματα με εξισώσεις Β΄ βαθμού. Μεταφέρεται, όπως είπαμε, εδώ η γραφική παράσταση της **γραμμικής εξίσωσης αx + βy = γ**. Νομίζω ότι επικαλύπτεται η ύλη με τη γραφική παράσταση συναρτήσεων 1ου βαθμού.

Αμέσως μετά ακολουθούν οι **συναρτήσεις**, όπου χάθηκε η συνάρτηση: y = α·x και η y = αx+β, και ξεκινά κατευθείαν, δίχως να δοθούν ξανά ορισμοί κ.λπ. με την παραβολή.

- Καταργείται λοιπόν, σιωπηρά, η **σπειροειδής ανάπτυξη της ύλης**, σύμφωνα με την οποία: "*οι γνώσεις από τις προηγούμενες τάξεις επαναλαμβάνονται σε πιο προχωρημένη μορφή, ενώ εισάγονται και νέες*";

  Απόσπασμα από Οδηγίες για διδασκαλία Μαθηματικών 2003, σελ. 77, έκδοση του Π.Ι.

  Επίσης φεύγει η υπερβολή, που υποβιβάζεται πλήρως κι αυτή στη Β΄ Γυμνασίου.

- Στην μελέτη της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, αναφέρεται ότι πρέπει: "*Να γνωρίζουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι η παραβολή $y=\alpha x^2$ μετατοπισμένη παράλληλα προς τους άξονες και έχει κορυφή το σημείο $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$*" Αυτό θα αποδειχθεί, θα εξηγηθεί (είναι εφικτό;) ή θα δοθεί για απομνημόνευση; (Να ο φορμαλισμός!).

Πιθανότητες: Εισάγονται Σύνολα, Δειγματικοί Χώροι, και Κανόνες Λογισμού, μέχρι και Προσθετικός Νόμος Πιθανοτήτων. Εδώ, αφού θα μας περισέψει χρόνος άφθονος (έχουμε 3 ώρες για κλασικό ορισμό και κανόνες λογισμού), θα ασχοληθούμε με τη Διαθεματική Παρουσίαση "Η μεταβίβαση χαρακτηριστικών από γενιά σε γενιά (νόμος Mentel)".

Μιλώ ειλικρινά, μακάρι να ήταν έτσι φτιαγμένο το Π.Σ. και μακάρι να είχαμε τα εφόδια, ώστε να παρουσιάζαμε κι αυτό το θέμα και άλλα πολλά και σε συνδιδασκαλία με άλλες ειδικότητες. Θα γινόταν πιο ενδιαφέρον κι ο ρόλος του καθηγητή. Θά 'σπαγε η μονοτονία.
Όμως ας το καταλάβουν: Δυο καρπούζια δεν χωράνε σε μια μασχάλη. Δεν γίνεται να διδάξεις, να εξετάσεις και να ολοκληρώσεις την ενότητα σε 3 ώρες και ταυτόχρονα να ασχοληθείς και με τα παραπάνω. Το ίδιο ισχύει σχεδόν παντού!

Πάμε στη **Γεωμετρία:** Ξεκινά με την ισότητα τριγώνων, άντε κι ας μην το λέει, θα υπενθυμίσουμε μόνοι μας στους μαθητές τα στοιχεία του τριγώνου και την τριγωνική ανισότητα και το άθροισμα των γωνιών του, για να μπορούμε να δουλέψουμε.

- Παρακάτω εισάγεται η έννοια του **λόγου ευθυγράμμων τμημάτων**. "*Να γνωρίζουν ότι ο λόγος δυο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης*".

Συγνώμη˙ τότε πώς ορίσαμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς στη Β΄ Γυμνασίου; Δεν υπάρχει δικαιολογία ότι δεν το πρόσεξαν, διότι έτσι εφαρμοζόταν μέχρι τώρα. Επομένως πρέπει να διακαιολογηθεί για ποιο λόγο άλλαξαν εδώ τη σειρά της ύλης.

- Ακολουθεί το Θεώρημα του Θαλή, δίχως διευκρινήσεις και μετά εισάγεται η έννοια της **ομοιοθεσίας** με μια δραστηριότητα:
  Ζητείται από τους μαθητές:
  Να βρίσκουν το ομοιόθετο ενός πολυγώνου με κέντρο ένα σημείο Ο και λόγο ένα θετικό αριθμό λ. Να γνωρίζουν ότι το ομοιόθετο ενός πολυγώνου ως προς ένα σημείο Ο και με λόγο έναν θετικό αριθμό λ είναι μια μεγέθυνση του αρχικού πολυγώνου αν λ>1 και μια σμίκρυνση αυτού αν 0<λ<1.

  Όλα αυτά απλά για να εισάγουμε την έννοια της **ομοιότητας**. Είναι νομίζω περιττό να κάνουμε τόση φασαρία για την παρουσίαση μιας σχετικά απλής έννοιας (θέλουν χρόνο τα σχήματα και οι μετρήσεις). Αρκεί νομίζω να παρουσιάσουμε μερικές φωτοτυπίες με μεγένθυση και με σμίκρυνση απλών σχημάτων και να κάνουμε κάποιες μετρήσεις των πλευρών και των γωνιών τους.

- Αναφέρεται: "*Να γνωρίζουν ότι δύο πολύγωνα λέγονται όμοια, όταν το ένα από αυτά είναι μεγέθυνση του άλλου*". Δεν είναι ακριβές, διότι και τα ίσα σχήματα είναι όμοια. Καλός δεν είναι ο μέχρι τώρα ορισμός: "*Σε δυο όμοια ευθύγραμμα σχήματα οι ομόλογες γωνίες είναι ίσες και οι ομόλογες πλευρές είναι ανάλογες*";
  Παρακάτω: "*Να αναγνωρίζουν τα κοινά χαρακτηριστικά των ομοίων τριγώνων και να εντοπίζουν τις πιθανές διαφορές τους*". Τι εννοεί;
  Ζητά: "*Να γνωρίζουν ότι δυο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν δυο γωνίες ίσες*". Δεν αναφέρει λέξη για το αν θα διδαχτεί η κατασκευή των λόγων των ομόλογων πλευρών. Αν όχι, προς τι όλα τα παραπάνω;
  Επίσης δεν αναφέρει ως κριτήριο (τουλάχιστον) το ότι είναι όμοια δύο τρίγωνα αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, (οπότε θα έχουν και τις απέναντί τους γωνίες ίσες).

- Τέλος στο ίδιο κεφάλαιο προτείνεται η δραστηριότητα: "*Να δοθεί στους μαθητές ένας χάρτης και να τους ζητηθεί να υπολογίσουν την πραγματική απόσταση δυο πόλεων αν είναι γνωστή η κλίμακα ή την κλίμακα αν είναι γνωστή η πραγματική απόσταση δυο πόλεων*".

  Άσχετο παράδειγμα για ομοιότητα πολυγώνων. Δεν βοηθά στην κατανόηση της ομοιότητας. Ταιριάζει βεβαίως σε ανάλογα ποσά της Β΄ Γυμνασίου, μετά τη συνάρτηση y = αx. (Βλέπε εφαρμογές αναλόγων ποσών στο σημερινό βιβλίο).

Στην **τριγωνομετρία** μπαίνουμε κατ' ευθείαν στον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Ακολουθούν οι ταυτότητες και οι νόμοι Ημιτόνων και Συνημιτότων.

- Αναγκαστικά ο καθηγητής θα πρέπει να υπενθυμίσει τους ορισμούς στο τρίγωνο. Οι ώρες που αναφέρονται είναι πλασματικές. Η παραπάνω περίπτωση επιβεβαιώνει την εκτίμηση ότι το πρόγραμμα είναι πλασματικό (άρα ανεφάρμοστο), γιατί δεν λαμβάνει υπόψη τις πραγματικές συνθήκες και ανάγκες στην τάξη: Π.χ. οι μαθητές δεν μπορούν να διατηρούν ανέπαφους στη μνήμη τους τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών από τη Β΄ Γυμνασίου. Χρειάζεται χρόνος για επαναλήψεις, επεξηγήσεις κ.λπ. Το Π.Σ. είναι με ψυχρότητα αυστηρό λες και δεν διδάσκεις σε μαθητές, αλλά αποθηκεύεις γνώσεις σε σκληρό δίσκο, τις οποίες ανακαλείς όποτε θες. Η πραγματικότητα όμως είναι άλλη. Αναρωτιέμαι αν οι συντάκτες έλαβαν υπόψη τους την εμπειρία τους από την διδασκαλία στην τάξη ή απλά ταξινόμησαν ύλη που ***θα πρέπε (;)*** να βγει στον χρόνο που ο νόμος προβλέπει.

- Και αφού μιλάμε για τον χρόνο διδασκαλίας που προβλέπεται, συγκρίνοντας τα προγράμματα του ΦΕΚ 1374 και το τωρινό, είμαι σίγουρος ότι η κατανομή των ωρών σε κάθε ενότητα γίνεται με τη μέθοδο: "*έχει πλάκα να ψάχνεις το τζόκερ*". Ακούγεται σκληρά ειρωνικό˙ προσέξτε όμως τα παρακάτω ελάχιστα παραδείγματα, (*στα οποία δεν έγινε καμμία άλλη μεταβολή*):

Ενότητα	**ΦΕΚ 1374 (2001)**	**Π.Σ. 2002**
Πράξεις με αριθμούς	7 ώρες	5 ώρες
Μονώνυμα και πολυώνυμα. Πράξεις με μονώνυμα Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων	8 ώρες	6 ώρες
Αξιοσημείωτες ταυτότητες	6 ώρες	5 ώρες
Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. αλγεβρικών παραστάσεων	11 ώρες	8 ώρες(!)
Ομοιοθεσία Ομοιότητα	8 ώρες	6 ώρες
Εμβαδά ομοίων σχημάτων	3 ώρες	2 ώρες
Νόμος ημιτόνων, Νόμος συνημιτόνων	8 ώρες (!)	5 ώρες

- Προσέξτε το τελευταίο κεφάλαιο: (Νόμος ημιτόνων, Νόμος συνημιτόνων). Στο πρόγραμμα του 2001 του δινόταν 8 ολάκερες ώρες, δηλαδή επί δύο εβδομάδες θα ασχολιόταν η τάξη να λύνει ασκήσεις μετρήσεων με τους τύπους αυτούς! Είμαι καχύποπτος αν ισχυριστώ ότι, ως τελευταίο, του δόθηκαν οι ώρες που έλειπαν για να συμπληρωθεί το πρόγραμμα;

  Τώρα φαίνεται ότι έλειπαν μόλις 5 ώρες, οπότε θα διδάσκουμε το Νόμο των Ημιτόνων και το Νόμο των Συνημιτόνων επί 5 κι όχι επί 8 ώρες.
  Ζητώ απάντηση και εξήγηση: Τι άλλαξε από το 2001 ως τώρα και μεταβλήθηκε ο προβλεπόμενος αριθμός ωρών;
  Άραγε εφαρμόζεται πειραματική διδασκαλία σε τάξεις (όχι μόνο πρότυπες, αλλά αντιπροσωπευτικές του συνόλου), πριν κατανεμηθούν οι ώρες διδασκαλίας;

Συμπεράσματα

Διδακτική Στρατηγική

Στην εισαγωγή του Π.Σ. (σελ 15) αναφέρονται οι γενικές παραδοχές της διδακτικής μεθοδολογίας και προτείνεται (σελ. 16) ως κύρια μεθοδολογική προσέγγιση η "Διερεύνηση και Ανακάλυψη" (ενεργητική προσέγγιση της γνώσης).

Επίσης εισάγεται με πολλές τυμπανοκρουσίες η Διαθεματική Προσέγγιση: (*συγκρότηση ενιαίου συνόλου γνώσεων και δεξιοτήτων, ολιστική αντίληψη της γνώσης*) (σελ 10). Πιστεύω ότι μπορεί να υπάρχουν από τους συντάκτες οι καλύτερες των προθέσεων (έχει δοθεί βαρύτητα στις οδηγίες συγγραφής των βιβλίων σε τέτοια παραδείγματα), αλλά δίχως την κατάλληλη υποστήριξη και υποδομή θα μείνει ως όμορφη ιδέα, κενή περιεχομένου.

Με τους στόχους που θέτει στα λόγια η εισαγωγή του Π.Σ. συμφωνούμε απολύτως. Που είναι όμως το πρόβλημα; Το Π.Σ. άραγε διευκολύνει και υπηρετεί αυτήν την κατεύθυνση; Νομίζω ότι μεταβαίνοντας από την εισαγωγή στο Αναλυτικό Πρόγραμμα, όλα τα παραπάνω αυτοαναιρούνται. Πολέμιος των κατευθύνσεων του Π.Σ. δεν είναι οι (συνήθεις ύποπτοι) εκπαιδευτικοί. Είναι το ίδιο το Αναλυτικό Π.Σ., αλλά και οι υπαρκτές συνθήκες του Ελληνικού Σχολείου.

Γιατί και σε ποιον χρειάζεται η εντατικοποίηση;

Το ελληνικό λύκειο επί δεκαετίες λειτουργεί ως προθάλαμος των Πανεπιστημίων και βασικός του σκοπός είναι ο διαχωρισμός και η την ταξινόμησή των μαθητών ως προς τη σειρά εισαγωγής στα ΑΕΙ. Ο κλιμακούμενος ανταγωνισμός οδηγεί, κατά την εφαρμογή κάθε νέου συστήματος (Πανελλήνιες Β΄, Γ΄ Λυκείου 1980, Πανελλαδικές με Δέσμες 1983, Ενιαίο Απολυτήριο 1999) σταδιακά σε υψηλότερου επιπέδου θέματα, άρα και η σχετική προετοιμασία πρέπει να γίνεται με πιο εντατικούς ρυθμούς και σε μεγαλύτερο βάθος της ύλης. "Εμπόδιο" εδώ στεκόταν τα Π.Σ. και τα βιβλία του Γυμνασίου, που έχουν ήδη συμπληρώσει σχεδόν δωδεκαετία λειτουργίας.

Η απρόσκοπτη λειτουργία του συστήματος απαιτεί λοιπόν εντατικοποίηση από την πρώτη μέρα στο Γυμνάσιο (ίσως και στο Δημοτικό, δεν μπορώ να κρίνω)... κι όποιος αντέξει. Εδώ ακριβώς εντοπίζονται οι νέοι κοινωνικοί, ταξικοί φραγμοί που το Π.Σ. επιφυλάσσει για τα παιδιά που είτε ζουν στην επαρχία, δίχως επιπλέον στήριξη, είτε οικονομικά αδυνατούν να λάβουν υποστήριξη, είτε αδυνατούν ουσιαστικά να παρακολουθήσουν τους νέους εντατικότερους ρυθμούς. Θα δουν την έξοδο από το σχολείο ταχύτερα από ότι θα ήθελαν και από ότι θα ήταν παιδαγωγικά σωστό.

Οι εκφράσεις λοιπόν της μορφής: "οι νέες επιστημονικές αναγκαιότητες...", "σε έναν κόσμο που εξελίσσεται...", "να μην χάσουμε το τραίνο της προόδου και της εξέλιξης...", αποκρύπτουν την ουσία, ότι να να τρέξουμε ταχύτερα να προλάβουμε το τραίνο, πρέπει να απαλλαγούμε από τα περιττά βάρη (μαθητές β΄ διαλογής) που μας καθυστερούν την τρεχάλα. Μα κι αυτούς που μένουν πρέπει να τους ζορίσουμε μέχρι εκεί που δεν πάει άλλο.

Όγκος ύλης

Νομίζω ότι με τον όγκο ύλης που πρέπει να διδαχθεί, δεν είναι δυνατή η μαθητοκεντρική διδασκαλία, της "ανακάλυψης" της γνώσης, του πειραματισμού, της πρωτοβουλίας κ.λπ. Επίσης είναι προδιεγραμμένο ότι οποιαδήποτε διαθεματική εργασία θα συμπληρώνεται εκτός σχολείου με τη βοήθεια γονιών, καθηγητών κ.λπ. Ο χρόνος που έχουν τα παιδιά έχει ελαχιστοποιηθεί. Φανταστείτε σε κάθε βασικό μάθημα να έχουν, εκτός των άλλων, και συνθετικές εργασίες. Είναι ανέφικτο˙ εξάλλου, η ίδια η παρουσίαση της ύλης δεν δίνει διέξοδο για εξερευνητική εργασία, ανάπτυξη αυτενέργειας, πρωτοβουλίας του μαθητή. Απλά, δεν προλαβαίνουμε! Όποιος καθηγητής επιχειρήσει κάτι τέτοιο θα ανακαλύψει ότι χάνει χρόνο σε σχέση με το πρόγραμμα.

Περιεχόμενο-Βοηθήματα

Φανταστείτε την εικόνα καθηγητή που θά 'θελε να εφαρμόσει "ανακαλυπτική διαδικασία", δίχως όμως κατάλληλα εφόδια και προετοιμασία: Μπαίνει μέσα στην τάξη και ανακοινώνει στους μαθητές: "Σήμερα θέλω να ανακαλύψετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Σε 40 λεπτά θα ελέγξω τι έχετε κάνει...!". Ο ρόλος του καθηγητή είναι καταλυτικός. Χρειάζεται όμως κατάλληλα εργαλεία, τα οποία κυρίως θα πρέπει να του δίνουν το βιβλίο και τα συνοδευτικά βοηθήματα. Το πρόγραμμα δεν φαίνεται να δίνει τέτοια εργαλεία. Μην είμαστε όμως άδικοι. Θα φανεί μόλις κυκλοφορήσουν τα βιβλία και τα συνοδευτικά βοηθήματα. Ο φορμαλισμός όμως που διαφαίνεται στο Π.Σ., δεν αφήνει περιθώρια αισιοδοξίας για τέτοιες μεθόδους διδασκαλίας.

Πρόγραμμα Σπουδών πραγματικό ή πλασματικό;

Είναι απαράδεκτο το καθεστώς κάθε χρόνο να αλλάζει η διδακτέα ύλη και να δίνονται νέες οδηγίες, για το τι θα διδαχτεί και τι όχι.

Οι περιοριστικές οδηγίες δεσμεύουν τη διδασκαλία. Δημιουργεί περισσότερα προβλήματα στον καθηγητή από όσα μπαλώνει π.χ. η οδηγία: "*να διδαχθεί η τάδε άσκηση, το δείνα παράδειγμα και να μην διδαχθεί η τάδε παρατήρηση ή οι ασκήσεις 5, 6, 7...*". Παρατηρείστε π.χ. ότι το βιβλίο Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου είναι γεμάτο αποδείξεις, πορίσματα κ.λπ. κι όμως, με βάση τις οδηγίες διδασκαλίας από το 3ο και 4ο π.χ. κεφάλαιο βγαίνουν εκτός σχεδόν όλες. Άλλα λέει λοιπόν το σχολικό βιβλίο και το βιβλίο του καθηγητή και άλλα οι οδηγίες διδασκαλίας. Αυτοαναιρείται έτσι ο στόχος του Π. Σ. και των συγγραφέων του βιβλίου. Στην ουσία δεν διδάσκεται αυτό το βιβλίο.

Κατά τη γνώμη μου δεν θα μπορούσε να διδαχτεί στην ολότητά του (στην Α΄ Λυκείου με όλα τα θεωρήματα μέχρι το 8ο κεφάλαιο! και στη Β΄ Λυκείου και η στερεομετρία), λόγω της ευρύτητας και της δομής της ύλης. Επειδή είναι το νεότερο βιβλίο και σηματοδοτεί την κατεύθυνση του Π.Ι., φοβάμαι ότι κάτι αντίστοιχο θα δούμε και στο Γυμνάσιο. Βιβλία δηλαδή που θα υπάρχουν, αλλά θά 'ναι σαν να μην υπάρχουν.

Γι' αυτό απαιτείται τα βιβλία να είναι ακριβή και περιεκτικά. Όποια προσθήκη, εκτός διδακτικού στόχου, κριθεί σημαντική, ας δίνεται σε βιβλίο με προεκτάσεις μόνο στους διδάσκοντες. Επίσης θα πρέπει το Π.Σ. θα πρέπει να είναι αληθινό κι όχι πλασματικό. Να μπορεί να καλυφθεί και να εξαντλείται όλο. Τούτο το πρόγραμμα είναι ανεφάρμοστο.

Περί διαλόγου και συμμετοχής

Παρατηρώ ότι δεν έχουν εμφανιστεί κείμενα, άρθρα, δημοσιεύσεις (από ειδικούς και από τους συντάκτες του Π.Σ., τουλάχιστον μέχρι τον Σεπτέμβριο του 2003), που να υπερασπίζονται και να δικαιολογούν τις αλλαγές (π.χ. γιατί να διδαχτούν έτσι τα ανάλογα ποσά στην Α΄ Γυμνασίου, ή γιατί να κατέβουν μία τάξη οι ρητοί).

Άραγε, θεωρούν ανάξιο λόγου να προετοιμάσουν και πείσουν την εκπαιδευτική κοινότητα για τις επικείμενες αλλαγές; Αυτό όμως σημαίνει ότι δεν υπερασπίζονται και με τόσο πάθος το Π.Σ., αφού βέβαια δεν μπορεί να εφαρμοστεί μόνο του, δίχως τη συμμετοχή καθηγητών και διδασκομένων. Με αυτήν την προϋπόθεση συμπεραίνουμε ότι το Π.Σ. έγινε απλά και μόνο για να οδηγήσει στην συγγραφή νέων βιβλίων, στο μοίρασμα των κονδυλίων κ.λπ.

Η "επιμόρφωση" θα γίνει μετά την κυκλοφορία των βιβλίων; Θα βρεθεί δηλαδή προ τετελεσμένων η εκπαιδευτική κοινότητα; Ωραία αντίληψη περί διαλόγου και συμμετοχής. Να λάβουν όμως υπόψη ότι **ο καθοριστικός παράγοντας** στη διαδικασία της μάθησης είναι η στάση του δασκάλου στην τάξη. Και για να έχει "ψυχή" η διδασκαλία, πρέπει ο καθηγητής να έχει συμμετάσχει στη διαδικασία παραγωγής του Π.Σ. ή τουλάχιστον να τον βρίσκει σύμφωνο. Διαφορετικά αισθάνεται ότι τον αντιμετωπίζουν σαν έναν αμελητέο ιμάντα μεταφοράς της "σοφίας" που κάποιοι άλλοι του επέβαλαν να μεταφέρει.

Εντύπωση μου προκαλεί η σιωπή της ηγεσίας της Ε.Μ.Ε. Αν δεν πάρει θέση εδώ, με τι θα ασχοληθεί; Πολλές φορές η σιωπή σημαίνει συμμετοχή (να μην πω διαπλοκή, που είναι και της μόδας, ή συνενοχή, εξαγοράσιμη με προγράμματα, κονδύλια, πακέτα επιμόρφωσης κ.λπ).

Ποιος μένει; Νομίζω μείναμε μόνοι μας, οι χιλιάδες μάχιμοι (στις τάξεις) δάσκαλοι, που καθημερινά στο δημόσιο ή στον ιδιωτικό χώρο προσφέρουμε ότι και όπως μπορούμε στην υπόθεση της Παιδείας, αφού εθελοντικά αποφασίσαμε να βρισκόμαστε εδώ!

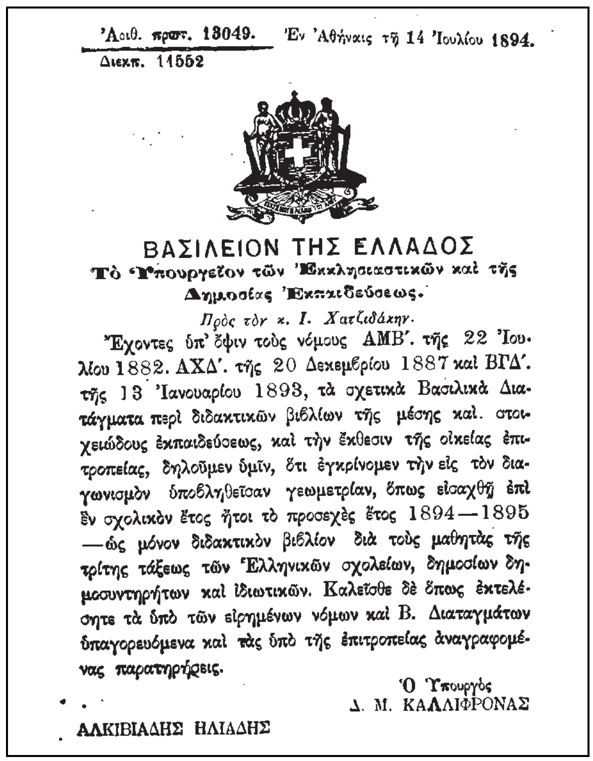
Προσθήκη, ... ως υστερόγραφο

1. Το κείμενο γράφτηκε τον **Μάρτιο του 2003** και αποτέλεσε τον κορμό σχετικής εισήγησης του υπογράφοντος σε συζήτηση του παραρτήματος Κέρκυρας της Ε.Μ.Ε. σχετικά με το περιεχόμενο των νέων αναλυτικών προγραμμάτων για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου.

2. **Σεπτέμβριος 2003:** Βρίσκεται σε εξέλιξη η διαδικασία επιλογής των συγγραφικών ομάδων των νέων βιβλίων, στη βάση του νέου Αναλυτικού Προγράμματος.
   Επειδή η εκπαιδευτική κοινότητα εξακολουθεί να βρίσκεται δίχως καμμία ενημέρωση για τις εξελίξεις, δημιουργείται ένα (*τουλάχιστον*) ερώτημα:
   Και τα τρία βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου, θα ανατεθούν σε μία συγγραφική ομάδα ή υπάρχει περίπτωση να γραφτεί το βιβλίο κάθε τάξης από διαφορετική;
   Αν ισχύσει η δεύτερη περίπτωση, και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα κείμενα κάθε ομάδας φυλλάσονται, φυσικά, επιμελώς από αδιάκριτα μάτια, επομένως δεν υπάρχει επικοινωνία και συνεργασία μεταξύ των ομάδων, πώς θα επιτευχθεί η συμβατότητα των βιβλίων από έτος σε έτος˙ η ομαλή μετάβαση δηλαδή από βιβλίο σε βιβλίο, που πιθανόν θα έχει διαφορετική μορφή και ύφος; Πώς θα αποφευχθεί τυχόν επιζήμια επικάλυψη ύλης ή αντίθετα εμφάνιση κενών;

Συμπτωματικά, ανακάλυψα το κείμενο του κορυφαίου Γεωμέτρη **Ι. Χατζιδάκη**, σε πρόλογο βιβλίου που έγραψε για τα δημοτικά το ... 1894 (!), για να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα "ασυμβατότητας" με τα βιβλία του για το Γυμνάσιο.

Άραγε, 110 χρόνια μετά, θα επαναληφθεί το ίδιο φαινόμενο;



Ἀριθ. πρωτ. 13049. Ἐν Ἀθήναις τῇ 14 Ἰουλίου 1894.
Διεκπ. 11552

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
Τὸ Ὑπουργεῖον τῶν Ἐκκλησιαστικῶν καὶ τῆς Δημοσίας Ἐκπαιδεύσεως.

Πρὸς τὸν κ. Ι. Χατζιδάκην.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τοὺς νόμους ΑΜΒ'. τῆς 22 Ἰουλίου 1882. ΑΧΔ'. τῆς 20 Δεκεμβρίου 1887 καὶ ΒΓΔ'. τῆς 13 Ἰανουαρίου 1893, τὰ σχετικὰ Βασιλικὰ Διατάγματα περὶ διδακτικῶν βιβλίων τῆς μέσης καὶ στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως, καὶ τὴν ἔκθεσιν τῆς οἰκείας ἐπιτροπείας, δηλοῦμεν ὑμῖν, ὅτι ἐγκρίνομεν τὴν εἰς τὸν διαγωνισμὸν ὑποβληθεῖσαν γεωμετρίαν, ὅπως εἰσαχθῇ ἐπὶ ἓν σχολικὸν ἔτος ἤτοι τὸ προσεχὲς ἔτος 1894—1895 —ὡς μόνον διδακτικὸν βιβλίον διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς τρίτης τάξεως τῶν Ἑλληνικῶν σχολείων, δημοσίων δημοσυντηρήτων καὶ ἰδιωτικῶν. Καλεῖσθε δὲ ὅπως ἐκτελέσητε τὰ ὑπὸ τῶν εἰρημένων νόμων καὶ Β. Διαταγμάτων ὑπαγορευόμενα καὶ τὰς ὑπὸ τῆς ἐπιτροπείας ἀναγραφομένας παρατηρήσεις.

Ὁ Ὑπουργὸς
Δ. Μ. ΚΑΛΛΙΦΡΟΝΑΣ

ΑΛΚΙΒΙΑΔΗΣ ΗΛΙΑΔΗΣ

Διαβάστε ολόκληρο το κείμενο του Ι. Χατζιδάκη, από τον πρόλογο του βιβλίου του "*Στοιχειώδης Γεωμετρία*" του 1894.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τὸ παρὸν βιβλίον τῆς Στοιχειώδους Γεωμετρίας ἔγραψα πρὸς χρῆσιν τῶν ἑλληνικῶν Σχολείων, διότι παρετήρησα, ὅτι τὰ ὑπάρχοντα βιβλία τῆς Γεωμετρίας τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων δὲν συμφωνοῦσι πρὸς τὴν ἐγκεκριμένην τῶν Γυμνασίων Γεωμετρίαν μου εἰς πολλὰ οὐσιώδη μέρη, ἰδίως δὲ εἴς τινας ὁρισμοὺς καὶ ἀποδείξεις καὶ εἰς τὴν τάξιν τῶν θεωρημάτων· ὥστε ὁ μαθητὴς ἄλλα μὲν μανθάνει ἐν τῷ ἑλληνικῷ Σχολείῳ ἄλλα δὲ καὶ κατ᾿ ἄλλην τάξιν ἐν τῷ Γυμνασίῳ· τούτῳ καὶ δυσκολωτέραν καθιστᾷ τὴν ἐκμάθησιν τῆς Γεωμετρίας καί, ἀπὸ τῆς παιδαγωγικῆς ἀπόψεως ἐξεταζόμενον, εἶνε βλαβερόν. Θὰ διωρθοῦτο δὲ ἡ ἀταξία αὕτη καὶ θὰ ἀπέβαινεν ἡ Γεωμετρία πολὺ εὐκολωτέρα εἰς τοὺς μαθητάς, ἂν ἐξ ἀρχῆς κατὰ τὸ αὐτὸ σύστημα ἐδιδάσκετο· τὴν γνώμην ταύτην μοὶ ἐξέφρασαν καὶ πολλοὶ τῶν διδασκόντων τὴν Γεωμετρίαν ἐν τοῖς ἑλληνικοῖς Σχολείοις παροτρύνοντές με εἰς τὴν ταχίστην ἔκδοσιν τοῦ βιβλίου.

Οἱ ὁρισμοί, αἱ ἀποδείξεις, ἡ τάξις τῶν θεωρημάτων καὶ ἡ εἰς βιβλία διαίρεσις τῆς ἐγκεκριμένης Γεωμετρίας μου διετηρήθησαν ὅσον ἦτο δυνατὸν καὶ ἐν τῷ βιβλίῳ τούτῳ πρὸς εὐκολίαν τῶν διδασκομένων. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γίνεται συνήθως, ἀπέκβεισα ἀπὸ τῶν ἀποδείξεων τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη, ὧν ἡ κατάληψις ἀπαιτεῖ ὡριμωτέραν διάνοιαν, ἠδυνήθην νὰ καταστήσω τὰ περὶ ὁμοιότητος θεωρήματα, ὡς καὶ ἄλλα τινά, ἁπλούστερα καὶ πρὸς τὴν μικρὰν ἡλικίαν τῶν διδασκομένων ἁρμοδιώτερα.

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗΣ

Ας ευχηθούμε, λοιπόν, καλή δύναμη στις ομάδες και στους επιβλέποντες του Π.Ι., ώστε να προκύψει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

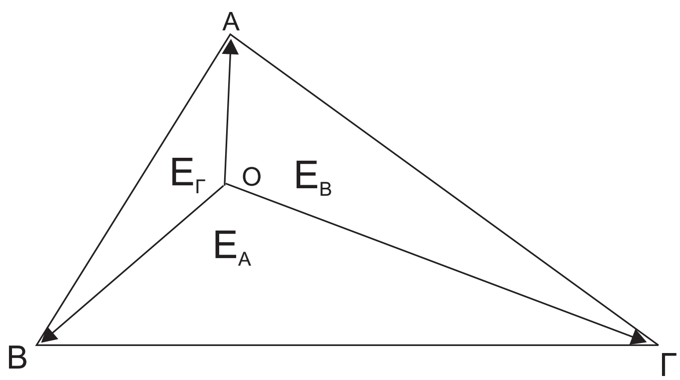
Επώνυμα Προβλήματα

Απλακίδης Γιάννης,
Μαθηματικός, Βέροια

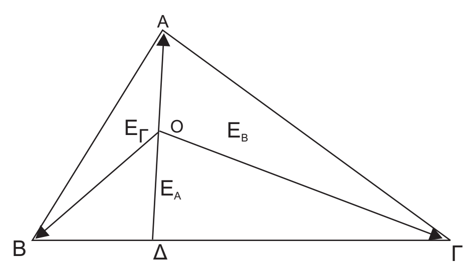
Πρόταση Καραθεοδωρή:

(*Δόθηκε για πρώτη φορά στην 1η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα*)

Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε τυχαίο σημείο Ο. Αν E_A, E_B,, E_Γ είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΒΟΓ, ΓΟΒ, και ΑΟΒ αντίστοιχα, να δειχτεί ότι: $E_A \cdot \overrightarrow{OA} + E_B \cdot \overrightarrow{OB} + E_\Gamma \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$.



ΛΥΣΗ:



Ισχύει: $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{(OB\Delta)}{(O\Delta\Gamma)} = \frac{E_\Gamma}{E_B}$ (1)

Αλλά,

$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{E_\Gamma}{E_B} \Rightarrow \frac{B\Delta}{B\Delta + \Delta\Gamma} = \frac{E_\Gamma}{E_B + E_\Gamma} \Rightarrow$$

$$\frac{ΒΔ}{ΒΓ}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ} \Rightarrow ΒΔ=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot ΒΓ \Rightarrow \overrightarrow{ΒΔ}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot\overrightarrow{ΒΓ} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{ΟΔ}-\overrightarrow{ΟΒ}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot\left(\overrightarrow{ΟΓ}-\overrightarrow{ΟΒ}\right) \qquad (2)$$

Από την (1) έχω:

$$\frac{(ΟΒΔ)}{(ΟΔΓ)}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β} \Rightarrow \frac{(ΟΒΔ)}{(ΟΔΒ)+(ΟΔΓ)}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ} \Rightarrow \frac{(ΟΒΔ)}{Ε_Α}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ} \Rightarrow$$

$$\frac{(ΟΒΔ)}{Ε_Γ}=\frac{Ε_Α}{Ε_Β+Ε_Γ} \qquad (3).$$

Όμως, $\frac{ΟΔ}{ΟΑ}=\frac{(ΟΒΔ)}{Ε_Γ}\overset{(3)}{\Rightarrow}\frac{ΟΔ}{ΟΑ}=\frac{Ε_Α}{Ε_Β+Ε_Γ} \Rightarrow ΟΔ=\frac{Ε_Α}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot ΟΑ \Rightarrow$

$$\overrightarrow{ΟΔ}=-\frac{Ε_Α}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot\overrightarrow{ΟΑ}$$

Άρα, η (2) γίνεται: $-\frac{Ε_Α}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot\overrightarrow{ΟΑ}-\overrightarrow{ΟΒ}=\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot\overrightarrow{ΟΓ}-\frac{Ε_Γ}{Ε_Β+Ε_Γ}\cdot\overrightarrow{ΟΒ} \Rightarrow$

$$-Ε_Α\cdot\overrightarrow{ΟΑ}-Ε_Β\cdot\overrightarrow{ΟΒ}-Ε_Γ\cdot\overrightarrow{ΟΒ}=Ε_Γ\cdot\overrightarrow{ΟΓ}-Ε_Γ\cdot\overrightarrow{ΟΒ} \Rightarrow$$

$$Ε_Α\cdot\overrightarrow{ΟΑ}+Ε_Β\cdot\overrightarrow{ΟΒ}+Ε_Γ\cdot\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{0}$$

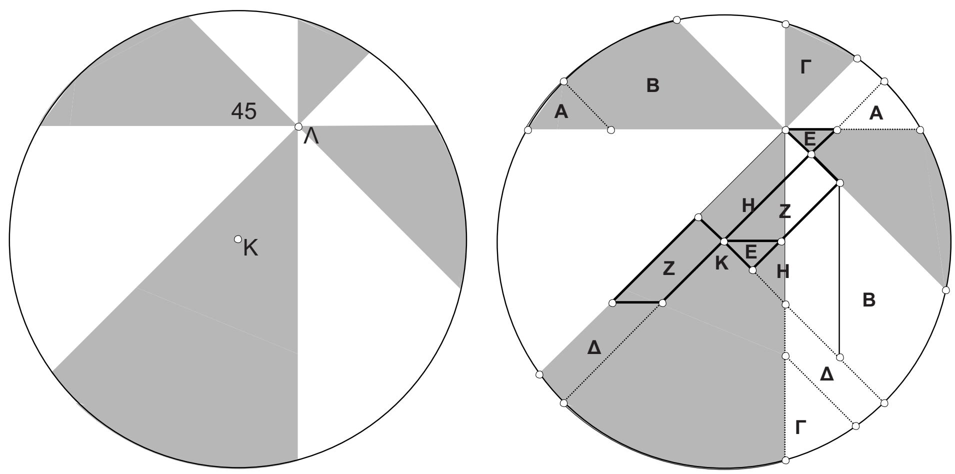
Το Θεώρημα της πίτσας

(μια απόδειξη χωρίς λόγια)

Γιάννης Απλακίδης
Μαθηματικός, Βέροια

Έστω κυκλικός δίσκος (Κ, R) και Ο ένα εσωτερικό σημείο του. Τέσσερις χορδές που διέρχονται από το Ο σχηματίζουν μεταξύ τους γωνίες 45^o. Οι χορδές αυτές ορίζουν 8 ψευδοτομείς τους οποίους χρωματίζουμε εναλλάξ λευκούς και γκρίζους. Ν.δ.ο. το άθροισμα των εμβαδών των λευκών ψευδοτομέων είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των γκρίζων.

Στο 1ο τεύχος του περιοδικού QUANTUM (Μάιος–Ιούνιος 1994, σελ. 34) παρουσιάστηκε το θεώρημα της πίτσας.
Η λύση που προτείνω έχει τη μορφή παιχνιδιού (puzzle), και αυτό νομίζω την κάνει απλή και κατανοητή.



Διαχωρίζω τους γκρίζους ψευδοτομείς σε κατάλληλα χωρία και βρίσκω τα αντίστοιχα στους λευκούς ψευδοτομείς. Αποδεικνύω με αυτόν τον τρόπο ότι τα γκρίζα χωρία ισοδυναμούν με το μισό κυκλικό δίσκο. Επομένως τα υπόλοιπα λευκά χωρία ισοδυναμούν με τον άλλο μισό κυκλικό δίσκο, άρα θα έχουν ίσα εμβαδά.

Η μέθοδος διαχωρισμού είναι πάντα συγκεκριμένη και εφαρμόζεται για οποιαδήποτε επιλογή του σημείου Λ.

Μέχρι τώρα έχουν δημοσιευθεί δύο λύσεις αναλυτικές μία ήταν στο περιοδικό "Μαθηματική Παιδεία", τεύχος 3 σελ. 67, του κ. Αναστασόπουλου και η άλλη στον "Ευκλείδη Β΄", τεύχος 22, 1996, σελ. 61 του κ. Καζακόπουλου.

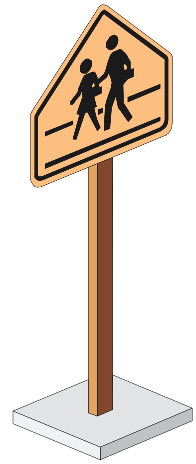
Μια παρόμοια λύση με διαφορετικό τρόπο διαχωρισμού των χωρίων δημοσιεύτηκε στο περιοδικό "MATHEMATICS MAGAZINE", (vol. 67, No. 4, OCTOBER 1994, p.267), από τον κ. Wagon.(*)

Τόσο η λύση του κ. Wagon, όσο και η μέθοδος διαχωρισμού των χωρίων είναι στη διάθεση του περιοδικού.

Περισσότερες πληροφορίες μπορείτε να βρείτε στο περιοδικό QUANTUM (Μάιος–Ιούνιος 1994, σελ 34).

(*) Η λύση αυτή δημοσιεύεται στο περιοδικό μας, στη σελίδα 71, στην εργασία των εμβαδών του Ν. Δεργιαδέ.

Επισημάνσεις - Διευκρινίσεις πάνω στη Σχολική ύλη



Συνεχίζουμε και στο τεύχος αυτό την παρουσίαση μιας στήλης με επισημάνσεις, παρατηρήσεις, συμπληρώσεις και διευκρινήσεις σε σημεία της θεωρίας των σχολικών βιβλίων, που κρίνονται αναγκαία για γίνουν ευκολότερα κατανοητά από τους μαθητές. Στο τεύχος αυτό παρουσιάζονται οι εργασίες των **Γ. Μπαζούκη – Α. Στογιαννόπουλου** για τους Μιγαδικούς αριθμούς και του **Δ. Γεωργακίλα** για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων αντιστρόφων συναρτήσεων.

$$z=x+\psi i \in \mathbb{C}$$
$$x,\psi \in \mathbb{R}$$

Μια βόλτα στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Μπαζούκης Γιώργος
Στογιαννόπουλος Αντώνης
Μαθηματικοί, Βέροια

Δύναμη μιγαδικού

Μπορεί ο μαθητής με τις γνώσεις που έχει (εντός ύλης) να υπολογίσει δύναμη μιγαδικού z; ($z^{\nu}=\ ;$)

Ναι, **α)** αν ο z είναι φανταστικός ή πραγματικός, δηλ. $z=\alpha i,\ \alpha\in\mathbb{R}$ ή $z=\beta\in\mathbb{R}$

β) αν μια μικρή δύναμη του z ισούται με $\alpha i,\ \alpha\in\mathbb{R}$ ή με $\beta\in\mathbb{R}$

Παραδείγματα:

1. Αν $z=\dfrac{6+8i}{4-3i}$ να βρείτε τον z^{2004}

Λύση:

$$z=\frac{6+8i}{4-3i}=\frac{(6+8i)(4+3i)}{4^2+3^2}=\frac{24+18i+32i-24}{25}=\frac{50i}{25}=2i$$

Άρα $\left.\begin{array}{l} z^{2004} = (2i)^{2004} = 2^{2004} \cdot i^{2004} \\ \text{επειδή } i^{2004} = i^0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z^{2004} = 2^{2004}$

2. Αν $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i$ να βρείτε τον z^{127}

Λύση:

Βρίσκω πρώτα μικρές δυνάμεις του z μέχρι να βρώ μια δύναμη του z που να κάνει αi, $\alpha \in \mathbb{R}$ ή $\beta \in \mathbb{R}$.

$$z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right)^2 = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i - \frac{1}{2} = -i$$

Διαιρώ το 127 με το 2: $127 = 2 \cdot 63 + 1$

Άρα $z^{127} = \left(z^2\right)^{63} \cdot z = (-i)^{63} \cdot z = i \cdot z = i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

Αν βρώ $z^2 = \alpha i$ διαιρώ τον εκθέτη με το 2.

Αν βρώ $z^3 = \alpha i$ διαιρώ τον εκθέτη με το 3.

Αν βρώ $z^4 = \alpha i$ διαιρώ τον εκθέτη με το 4 κ.τ.λ.

Δηλαδή αν $z^\kappa = \alpha i$ διαιρώ τον εκθέτη ν με το κ.

Προτεινόμενη άσκηση: Αν $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ να βρείτε τον z^{2006}

3. Αν $z^2 + z + 1 = 0$ (I), να αποδείξετε ότι $z^{2012} = z^2$.

Λύση:

(I) $\Rightarrow$ $z^2 = -z - 1$, άρα $z^3 = z^2 \cdot z = (-z-1) \cdot z = -z^2 - z \overset{(I)}{=} 1$.

Διαιρώ το 2012 με το 3: $2012 = 3 \cdot 670 + 2$.

Άρα $z^{2012} = z^{3 \cdot 670 + 2} = \left(z^3\right)^{670} \cdot z^2 = 1^{670} \cdot z^2 = z^2$

Γεωμετρικοί τόποι

Οι γεωμετρικοί τόποι είναι αυτοί που συναντήσαμε στη Β΄ Λυκείου.

Α΄ Μορφή:

Μας δίνουν τον μιγαδικό στη μορφή $z = \alpha + \beta i$ με Μ(α, β) η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο, όπου τα α, β έχουν μια ή περισσότερους παραμέτρους. Εμείς πρέπει να απαλείψουμε τις παραμέτρους.

Παραδείγματα:

4. Δίνεται ο μιγαδικός $z=(2\lambda+\kappa)+(\lambda-3\kappa)i$ όπου Α(κ, λ) σημείο που κινείται στην ευθεία (η): $y=2x-1$, $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.
Να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία M(z).

Λύση:

Είναι $M(2\lambda+\kappa,\ \lambda+3\kappa)$, άρα $x=2\lambda+\kappa$, $y=\lambda-3\kappa$

όμως οι συντεταγμένες του Α επαληθεύουν την εξισώση της (η)

Άρα $\lambda=2\kappa-1$

Τότε $\left.\begin{array}{l} x=2(2\kappa-1)+\kappa \\ y=2\kappa-1-3\kappa \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=5\kappa-2 \\ y=-\kappa-1 \end{array}\right\}$ (*κάνω απαλοιφή της παραμέτρου κ∈ℝ*)

$$\Rightarrow \begin{cases} \kappa=-y-1 \\ x=5(-y-1)-2 \Rightarrow x=-5y-7 \Rightarrow x+5y+7=0 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία M(z) κινούνται στην ευθεία ε: x+5y+7=0.

5. Αν $z=(3\eta\mu\theta+2)+(1-3\sigma\upsilon\nu\theta)i$, να βρείτε τη γραμμή πάνω στην οποία κινούνται τα σημεία M(z).

Λύση:

$M(3\eta\mu\theta+2,\ 1-3\sigma\upsilon\nu\theta)$

$$\left.\begin{array}{l} x=3\eta\mu\theta+2 \\ y=1-3\sigma\upsilon\nu\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3\eta\mu\theta=x-2 \\ 3\sigma\upsilon\nu\theta=1-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9\eta\mu^2\theta=(x-2)^2 \\ 9\sigma\upsilon\nu^2\theta=(1-y)^2 \end{array}\right\}(+)$$

$$\Rightarrow 9\eta\mu^2\theta+9\sigma\upsilon\nu^2\theta=(x-2)^2+(1-y)^2 \Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9$$

Άρα τα σημεία M(z) κινούνται στον κύκλο κέντρου Κ (2, 1) και ακτίνας ρ=3.

6. Αν $w=\dfrac{z+1}{z-i}$ να βρείτε το γτ. των σημείων M(z) όπου $z=x+yi$ όταν:

α) w πραγματικός **β)** w φανταστικός

Λύση:

Πρέπει $z-i\neq 0 \Leftrightarrow z\neq i \Leftrightarrow x+yi\neq 0+1\cdot i \Leftrightarrow (x,y)\neq(0,1)$

$$w=\frac{(x+1)+yi}{x+(y-1)i}=\frac{\left[(x+1)+yi\right]\cdot\left[x-(y-1)i\right]}{x^2+(y-1)^2}=$$

$$=\frac{x(x+1)+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}+\frac{xy-(x+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2}i$$

$$=\frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2}+\frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}i$$

α) Αν $w\in\mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Im}(w)=0 \Leftrightarrow x-y+1=0$

και άρα ο γ.τ. των σημείων M(z) είναι η ευθεία ε: $x-y+1=0$, εκτός από το σημείο (0, 1)

β) Αν $w\in\mathbb{I}$, τότε $\operatorname{Re}(w)=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-y=0$

(μορφή $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$), με $A^2+B^2-4\Gamma=2>0$

άρα ο γ.τ. των σημείων M(z) είναι κύκλος με κέντρο K $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ και ακτίνας $\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}$, εκτός από το σημείο (0, 1).

Προτεινόμενη άσκηση: Αν $z=(2ημθ,3συνθ)$ να βρείτε:

α) τη γραμμή πανω στην οποία κινούνται τα σημεία M(z), και

β) τη γραμμή πανω στην οποία κινούνται τα σημεία N(w), αν

$$w=z+3-(συνθ)i$$

Απάντηση: α) έλλειψη: $9x^2+4y^2=36$, *β) κύκλος* $(x-3)^2+y^2=4$

Β΄ Μορφή:

Ο μιγαδικός βρίσκεται σε μέτρο ή πρέπει εμείς να πάρουμε το μέτρο του μιγαδικού...

Μορφές Γ.Τ. 1) μεσοκάθετη... 2) κύκλος...
3) έλλειψη... 4) υπερβολή...

Παραδείγματα:

7. Αν z μιγαδικός αριθμός, να βρείτε το γ. τ. των σημείων M(z) αν ισχύει:

$$|z-1-i|=2|z-1+i| \quad (I)$$

(Απολυτήριες εξετάσεις Λυκείων Λευκωσίας Κύπρου).

Λύση:

Έστω $z=x+yi$, x, $y\in\mathbb{R}$

(I): $\quad |(x-1)+(y-1)i|=2|(x-1)+(y+1)i| \quad \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=4(x-1)^2+4(y+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=4x^2-8x+4+4y^2+8y+4 \Leftrightarrow$$
$$3x^2+3y^2-6x+10y+6=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2-2x+\frac{10}{3}y+2=0 \quad (\text{μορφή } x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0)$$
$$A^2+B^2-4\Gamma=4+\frac{100}{9}-8=\frac{64}{9}>0$$

M(z) κύκλος με κέντρο $K\left(1,-\frac{5}{3}\right)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{4}{3}$

Παρατήρηση 1

Οι μιγαδικοί της μορφής $z=\frac{\alpha\pm\beta i}{\beta\pm\alpha i}$ έχουν μέτρο 1

$$|z|=\frac{|\alpha\pm\beta i|}{|\beta\pm\alpha i|}=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\beta^2+\alpha^2}}=1.$$

Άρα τα σημεία M(z) κινούνται σε κύκλο με κέντρο K(0, 0) και ακτίνα 1.

Άσκηση (*σχολικού βιβλίου*)

1η εκφώνηση (*1η έκδοση βιβλίου*)

Αν $x\in\mathbb{R}$ να βρείτε σε ποια γραμμή κινούνται οι εικόνες του μιγαδικού:

$$z=\frac{1+xi}{x+i}.$$

Λύση:

Αν ο μαθητής ξέρει την παραπάνω παρατήρηση τότε θα πάρει το μέτρο του z και θα έχει: $|z|=\frac{|1+xi|}{|x+i|}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{x^2+1}}=1$

Άρα τα σημεία M(z) κινούνται σε κύκλο κέντρου K(0, 0) και ακτίνας ρ=1.

Διαφορετικά θα φέρει το z στη μορφή $\alpha+\beta i$ και θα πρέπει να κάνει απαλοιφή του $x\in\mathbb{R}$.

$$z=\frac{1+xi}{x+i}=\frac{(1+xi)(x-i)}{x^2+1}=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x^2-1}{x^2+1}i$$

Θέτουμε: $\left.\begin{aligned} \alpha &= \dfrac{2x}{x^2+1} \\ \beta &= \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{aligned}\right\}$ απαλοιφή του $x\in\mathbb{R}$

(*Όταν μπήκε σε διαγώνισμα σε σχολείο πολλοί μαθητές που ακολούθησαν αυτόν τον τρόπο δεν μπόρεσαν να κάνουν απαλοιφή του x*).

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{4x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \\ \beta^2 &= \frac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2} \end{aligned}\right\} (+)\quad \alpha^2+\beta^2 = \frac{4x^2+\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \ldots = \frac{\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2} = 1$$

Άρα $\alpha^2+\beta^2=1 \Rightarrow x_z^2+y_z^2=1 \Rightarrow$ τα σημεία M(z) κινούνται σε κύκλο με κέντρο K(0, 0) και ακτίνα ρ=1

2η εκφώνηση (***2η έκδοση βιβλίου***)

Αν $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εικόνα του μιγαδικού $z=\dfrac{1+xi}{x+i}$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο O(0, 0) και ακτίνα ρ=1.

Λύση:

Εδώ όλοι οδηγούνται στην λύση: αρκεί να δείξουμε ότι $|z|=1$.

Παρατήρηση 2

Όταν μας δίνουν κάποια σχέση με μέτρα για έναν μιγαδικό z και μας ζητάνε το γ.τ. M(w), όπου ο μιγαδικός w συνδέεται με τον z μέσω κάποιας σχέσης τότε προσπαθούμε να εκμεταλευτούμε τη σχέση που μας δώσανε αρχικά με τα μέτρα.

Παράδειγμα 1 (***άσκηση βιβλίου***)

Αν για τους μιγαδικούς z ισχύει $|z|=1$, (μπορεί να δοθεί αλλιώς:
Αν οι εικόνες του μιγαδικού z κινούνται σε κύκλο κέντρου O(0, 0) και ακτίνας ρ=1) να βρείτε που ανήκουν οι εικόνες των μιγαδικών

$$w=2z+1 \quad (1)$$

Λύση:

(1) $\Rightarrow 2z=w-1 \Rightarrow |2z|=|w-1| \Rightarrow 2\cdot|z|=|w-1| \Rightarrow |w-1|=2 \Rightarrow |w-(1+0i)|=2$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών w ανήκουν σε κύκλο K(1, 0) και ρ=2.

Παράδειγμα 2

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει: $\left|\dfrac{z+3}{z-3}\right|=2$ (1)

α) Να δείξετε ότι ο γ.τ. των σημείων M(z) είναι κύκλος του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

β) Να βρείτε τη γραμμή στην οποία κινούνται τα σημεία N(w), όταν:

$$w=\frac{z-9}{z-5}$$

Λύση:

(1) $\Leftrightarrow$ $|z+3|=2|z-3| \Leftrightarrow |z+3|^2=4|z-3|^2 \quad \Leftrightarrow$

$(z+3)(\bar{z}+3)=4(z-3)(\bar{z}-3) \Leftrightarrow ...z\bar{z}-5(z+\bar{z})+9=0 \qquad (2)$

για $z=x+yi$ (2) $\Leftrightarrow x^2+y^2-10x+9=0$.

Άρα ο γ.τ. των σημείων M(z) είναι κύκλος K(5, 0) και ρ=4

β) από το (α) προκύπτει ότι $|z-5|=4$ (3)

Έτσι έχω:

$$w=\frac{z-9}{z-5} \Leftrightarrow w=\frac{z-5-4}{z-5} \Leftrightarrow w=\frac{z-5}{z-5}-\frac{4}{z-5} \Leftrightarrow w=1-\frac{4}{z-5} \Leftrightarrow$$

$$w-1=-\frac{4}{z-5} \Rightarrow |w-1|=\left|\frac{-4}{z-5}\right| \Leftrightarrow |w-1|=\frac{4}{|z-5|} \overset{(3)}{\Leftrightarrow} |w-1|=\frac{4}{4}=1$$

Άρα η γραμμή στην οποία κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών N(w) είναι κύκλος κέντρου K(1, 0) και ακτίνας ρ=1.

Παρατηρήσεις – Παγίδες στους μιγαδικούς

1) Η εξίσωση $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\Delta<0$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες: $z_1=\dfrac{-\beta+i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, $\quad z_2=\dfrac{-\beta-i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$

οπότε για τα τριώνυμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση.
«Αν ο μιγαδικός αριθμός $z_0=\alpha+\beta i$ είναι ρίζα μιας πολυωνυμικής εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}_0=\alpha-\beta i$ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής».

2) Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δεν ισχύει η πρόταση:

$u^2 + v^2 = 0 \Rightarrow (u = 0 \text{ και } v = 0\ )$ διότι

$u^2 + v^2 = 0 \Leftrightarrow u^2 - i^2 \cdot v^2 = 0 \Rightarrow (u - i \cdot v)(u + i \cdot v) = 0$

$(u - i \cdot v = 0 \text{ ή } u + i \cdot v = 0) \Leftrightarrow (u = i \cdot v \text{ ή } u = \text{-}i \cdot v)$

δηλαδή αν $v = \alpha + \beta i$ τότε για τους

$u = i \cdot v = i(\alpha + \beta i) = \alpha i - \beta = -\beta + \alpha i$ και

$u = -iv = -i(\alpha + \beta i) = -\alpha i + \beta = \beta - \alpha i$ δεν ισχύει η πρόταση.

π.χ. $v = 3 + 4i$ τότε $u = -4 + 3i$

$$v^2 + u^2 = (3 + 4i)^2 + (-4 + 3i)^2 =$$

$$= 9 + 24i - 16 + 16 - 9 - 24i = 0\,.$$

3) α) Τι παριστάνει η σχέση: $|\bar{z} - 3 + 4i| = 2$

Μια βιαστική λανθασμένη λύση: παριστάνει κύκλο με κέντρο:
Κ(3, -4), ακτίνα ρ=2

$$|\bar{z} - 3 + 4i| = 2 \Leftrightarrow \left|\overline{\bar{z} - 3 + 4i}\right| = 2 \Leftrightarrow |z - 3 - 4i| = 2 \Leftrightarrow |z - (3 + 4i)| = 2$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο Κ(3, 4) και ακτίνα ρ = 2.

β) Τι παριστάνει η σχέση: $|3z - 2 + 6i| = 1$

$$\left|3(z - \frac{2}{3} + 2i)\right| = 1 \Leftrightarrow 3\left|z - \frac{2}{3} + 2i\right| = 1 \Leftrightarrow \left|z - \frac{2}{3} + 2i\right| = \frac{1}{3}$$

δηλαδή παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{2}{3}, -2\right)$ και ακτίνα ρ = $\frac{1}{3}$

4) Να υπολογιστεί το $\left|\frac{1+i}{1-i} + i\right|$

Δεν ισχύει $|z_1 \pm z_2| = |z_1| + |z_2|$ αλλά $|z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$

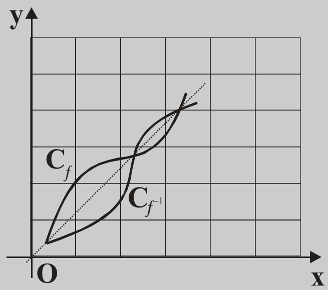
Για να υπολογίσουμε το μέτρο του μιγαδικού πρέπει να τον φέρουμε στην κανονική μορφή.

$\frac{1+i}{1-i} + i = \frac{1+i+i+1}{1-i} = \frac{2+2i}{1-i}$, οπότε: $\left|\frac{1+i}{1-i} + i\right| = \left|\frac{2+2i}{1-i}\right| = \frac{2|1+i|}{|1+i|} = 2$

Προσοχή $|1+i| = |1-i|$ διότι $1+i,\ \ 1-i$ ως συζυγείς έχουν ίσα μέτρα.

5) Αν $z = \alpha + \beta i,\ \ \beta \ne 0$ τότε $\mathrm{Re}(z^2) \ne \alpha^2$

Διότι $z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$. Άρα $\mathrm{Re}(z^2) = \alpha^2 - \beta^2$



Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

Δημήτρης Γεωργακίλας
Μαθηματικός - Συγγραφέας, Καλαμάτα

Θέμα 1

Α. Αν η συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, $B = A \cap f(A)$ μη κενό σύνολο και $x_0 \in B$, να αποδείξετε την ισοδυναμία:

$$f(x_0) = f^{-1}(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$$

Β. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

Απόδειξη:

Α. Έστω $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.
Αν $f(x_0) \neq x_0$, τότε ισχύει: $f(x_0) > x_0$ ή $f(x_0) < x_0$.

• Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι αντιστρέψιμη και η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα.
Οπότε από $f(x_0) > x_0$ έχουμε: $f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right) > f^{-1}\left(x_0\right) \Leftrightarrow x_0 > f\left(x_0\right)$,
(είναι $f^{-1}\left(f\left(x_0\right)\right) = x_0$ και $f^{-1}\left(x_0\right) = f\left(x_0\right)$), άτοπο διότι υποθέσαμε $f(x_0) > x_0$.

• Όμοια από $f(x_0) < x_0$ καταλήγουμε σε $x_0 < f(x_0)$ (άτοπο).

Άρα ισχύει $\boldsymbol{f(x_0) = x_0}$.

Αντίστροφο:

Έστω $f(x_0) = x_0$ για κάποιο $x_0 \in B$. Τότε $x_0 = f^{-1}(x_0)$, δηλαδή $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.

- Επομένως αποδείξαμε ότι οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο Β.

Σημείωση:

Στην απόδειξη χρησιμοποιήθηκε η πρόταση:

"*Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη, τότε και η $f^{-1}: f(A)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.*

Β. α) Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της f.

Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$f(x_1)-f(x_2)=2x_1^3-2x_2^3=2(x_1-x_2)\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)$$

Θεωρούμε το $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$ τριώνυμο ως προς x_1, οπότε η διακρίνουσά του είναι $\Delta = x_2^2-4x_2^2=-3x_2^2$.

- Αν $x_2\neq 0$, τότε $\Delta < 0$. Άρα $x_1^2+x_1x_2+x_2^2 > 0$ δηλαδή $f(x_1)-f(x_2) > 0$.
- Αν $x_2 = 0$, τότε $f(x_1)-f(x_2) = 2x_1^3 < 0$, γιατί $x_1 < 0$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς αντιστρέψιμη.

- Θα προσδιορίσουμε το $f(A)$.

Έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow 2x^3 - 1 = y \Leftrightarrow x^3 = \dfrac{y+1}{2}$ (1)

Η (1) για κάθε $y\in\mathbb{R}$ έχει λύση στο $\mathbb{R}$, την $x = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}}, & \text{αν } y\geq -1 \\ -\sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}}, & \text{αν } y<-1 \end{cases}$

Είναι $f(A) = \mathbb{R}$, οπότε η αντίστροφη της f είναι $f^{-1}: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}, & \text{αν } x\geq -1 \\ -\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}, & \text{αν } x<-1 \end{cases}$$

β) Αν Μ(x, y) κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}, τότε το ζεύγος (x, y) είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων:

$$y = f(x) \text{ και } y = f^{-1}(x),$$

από τις οποίες έχουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

Λόγω όμως του ερωτήματος Α, η τελευταία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$, διότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τη διχοτόμο $y = x$.

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = 2x^3 - 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 1 = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$2x^3 - x - 1 = (x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ή} \\ 2x^2 + 2x + 1 = 0 \text{ αδύνατη } (\Delta = -4 < 0) \end{cases}$$

2	0	–1	–1	x = 1
	2	2	1	
2	2	1	0	

Άρα Μ(1, 1) είναι το κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Σχόλιο

- Όταν ζητούνται τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f: A \to \mathbb{R}$ και $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$, επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων:

  $$y = f(x) \text{ και } y = f^{-1}(x)$$

  δηλαδή, στην ουσία, την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ (1).

  Πολλές φορές όμως είναι αδύνατη η εύρεση του τύπου της f^{-1}, ή δύσκολη η απευθείας επίλυση της εξίσωσης (1). Σε περιπτώσεις όμως που η f είναι γνησίως αύξουσα, αν είναι προτιμότερο, επιλύουμε την ισοδύναμή της: $f(x) = x$. Βρίσκουμε δηλαδή τα σημεία τομής της C με τη διχοτόμο $y = x$.
- Στην περίπτωση που η f είναι δεν είναι γνησίως αύξουσα, για να βρούμε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$, προσπαθούμε να λύσουμε απ' ευθείας την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$, αν αυτό είναι εύκολο.

Διαφορετικά περιοριζόμαστε στην εύρεση του πλήθους των λύσεών της, με τα γνωστά παρακάτω θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού.

- Σε κάθε περίπτωση πάντως, που είναι αδύνατη η απευθείας επίλυση της εξίσωσης (1) και ανεξάρτητα από τη μονοτονία της f, θα πρέπει, να θυμόμαστε ότι:

  ♦ Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, αν υπάρχουν, δεν βρίσκονται μόνο πάνω στη διχοτόμο $y = x$.

  ♦ Αν η C_f έχει κοινό σημείο με την ευθεία $y = x$, τότε λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$, το σημείο αυτό είναι και σημείο της $C_{f^{-1}}$.

  ♦ Αν όμως η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε όλα τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν) βρίσκονται πάνω στη διχοτόμο.

Θέμα 2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη.

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.

Λύση

α) Η συνάρτηση $f(x) = 1 - x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, άρα αντιστρέψιμη. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της f.

Έχουμε για κάθε $x \geq 0$: $f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = 1 - y$,
η οποία έχει λύση στο $[0, +\infty)$ τη $x = \sqrt{1-y}$, όταν $1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$.

Άρα $f(A) = (-\infty, 1]$ το σύνολο τιμών της f.

Επομένως $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in (-\infty, 1]$.

β) Έχουμε τις συναρτήσεις:

$$y = f(x) = 1 - x^2,\ x \in [0, +\infty) \quad \text{και} \quad f^{-1}(x) = \sqrt{1-x},\ x \in (-\infty, 1],$$

οπότε για κάθε $0 \leq x \leq 1$ η εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$ γράφεται:

$$1 - x^2 = \sqrt{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad (1-x^2)^2 = 1 - x \quad \Leftrightarrow$$

$$(1 + x)^2(1 - x)^2 = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad (1 + x)^2 (1 - x)^2 - (1 - x) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x)[(1+x)^2(1-x)-1]=0 \Leftrightarrow (1-x)[(1+x)(1-x^2)-1]=0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x)(1+x-x^2-x^3-1)=0 \Leftrightarrow (1-x)(x-x^2-x^3)=0 \Leftrightarrow$$

$$x(1-x)(1-x-x^2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x^2+x-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{x=0} \text{ ή } \mathbf{x=1} \text{ ή } \mathbf{x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \text{ ή } \mathbf{x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

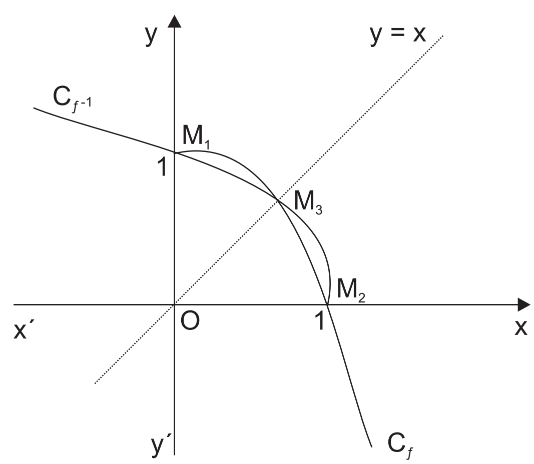
Η τελευταία απορρίπτεται διότι δεν ανήκει στο [0, 1].

Με αντικατάσταση στην εξίσωση $y = 1 - x^2$ έχουμε:

- Για $x = 0$ τότε $y = 1$,
- Για $x = 1$ τότε $y = 0$ και
- Για $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ τότε:

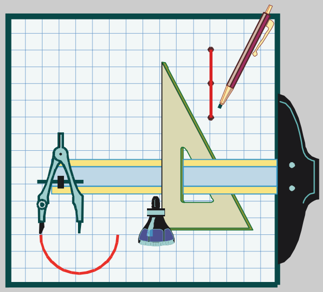
$$y=1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=1-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν τα κοινά σημεία:
$M_1(0, 1)$, $M_2(1, 0)$ και
$M_3\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$,
από τα οποία παρατηρούμε ότι το M_3 ανήκει στη διχοτόμο $y = x$, ενώ τα M_1 και M_2 δεν ανήκουν στην $y = x$.
Είναι όμως συμμετρικά ως προς αυτή.



ΣΗΜΕΙΩΣΗ Σ.Ε. :

Η παραπάνω εργασία του Δημήτρη Γεωργακίλα περιέχεται στο βιβλίο του **"*Ανάλυση Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου*"**, εκδόσεις **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ, Χ. Βαφειάδης**, Θεσσαλονίκη, Οκτώβριος 2003.



Η γραφική παράσταση ως εποπτικό μέσο διδασκαλίας

Ανδρέας Σβέρκος
Μαθηματικός, Βαρβάκειο Πειραματικό Λύκειο
Master Ε.Μ.Π.

Από τη διδακτική των μαθηματικών γνωρίζουμε ότι η χρήση ευρείας εποπτείας είναι απαραίτητη προϋπόθεση μιας επιτυχημένης διδασκαλίας. Στο Γυμνάσιο, λόγω του πρακτικού και συγκεκριμένου χαρακτήρα της, η διδασκόμενη ύλη προσφέρεται για τη χρησιμοποίηση παραστατικών μοντέλων. Δεν είναι όμως το ίδιο εύκολο για τη διδασκαλία στο Λύκειο, όπου κυριαρχεί η αποδεικτική διαδικασία, η γενίκευση και η αφαίρεση.

Όμως, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ένα πολύ πρόσφορο και πολλές φορές αναντικατάστατο μέσο εποπτικής παρουσίασης, ερμηνείας και κατανόησης των εννοιών και των προβλημάτων της Ανάλυσης.

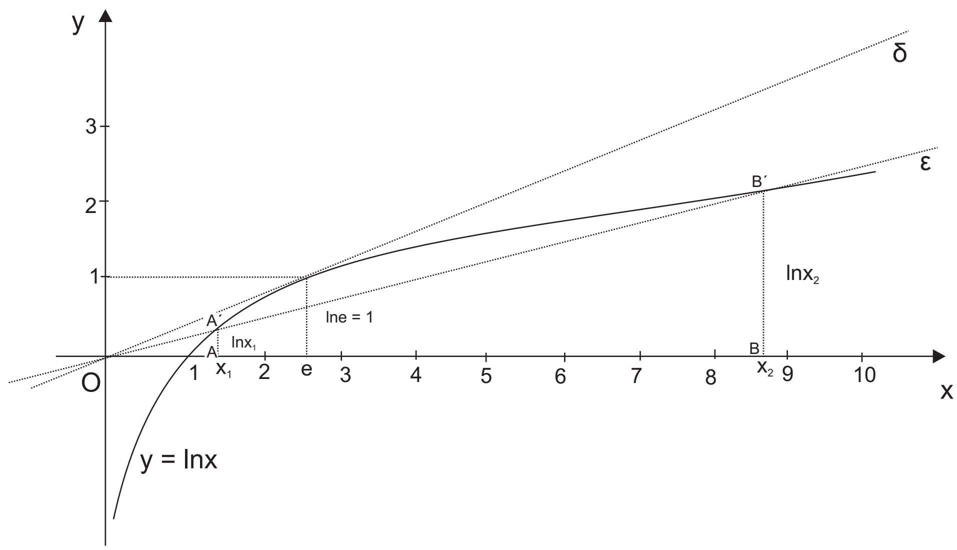
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα τέτοιο παράδειγμα και ελπίζουμε να κεντρίσουμε ακόμα μια φορά το ενδιαφέρον των συναδέλφων για την αναζήτηση εποπτικών μεθόδων διδασκαλίας, ακόμα και στις περιπτώσεις που αυτό φαντάζει δύσκολο ή αδύνατο.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ:

Η πράξη της ύψωσης ενός αριθμού σε έναν εκθέτη δεν είναι αντιμεταθετική, δηλαδή δεν ισχύει γενικά η ισότητα $x^y = y^x$. Σε κάποιες περιπτώσεις βέβαια επαληθεύεται η παραπάνω ισότητα, όπως $2^4 = 4^2$ ή όταν $x = y$. Η ανεύρεση όμως και άλλων ζευγών πραγματικών αριθμών που επαληθεύουν την εξίσωση $x^y = y^x$ δεν φαίνεται να είναι συνηθισμένη υπόθεση. Ένα άλλο ερώτημα που εμφανίζεται και σε άλλες επιστήμες (Χημεία, Φυσική) είναι η σύγκριση των αριθμών x^y και y^x.

Τα παραπάνω ερωτήματα θα προσπαθήσουμε να ξεδιαλύνουμε και να διαφωτίσουμε στην αρχή με εποπτικό τρόπο

Η Λύση:



Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί :

- η γραφική παράσταση με εξίσωση y = lnx,
- μια ευθεία ε η οποία διέρχεται από την αρχή του συστήματος και τέμνει τη λογαριθμική καμπύλη στα σημεία $(x_1, \ln x_1)$ και $(x_2, \ln x_2)$
- η εφαπτομένη δ της λογαριθμικής καμπύλης, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και, ως γνωστόν, έχει εξίσωση $y = \frac{1}{e}x$.

Από την ομοιότητα των τρίγωνων ΟΑΑ΄ και ΟΒΒ΄ έχουμε $\frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln x_1}{x_1}$

και επομένως $x_1 \ln x_2 = x_2 \ln x_1 \iff \ln\left(x_2^{x_1}\right) = \ln\left(x_1^{x_2}\right) \iff x_1^{x_2} = x_2^{x_1}$.

Υπάρχουν λοιπόν άπειρα ζεύγη αριθμών (x, y) που επαληθεύουν την εξίσωση $x^y = y^x$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δ είναι μεγαλύτερος από το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

Επομένως για κάθε x > 0 έχουμε $\frac{1}{e} \geq \frac{\ln x}{x}$,

και για x = π προκύπτει $\frac{1}{e} \geq \frac{\ln \pi}{\pi}$.

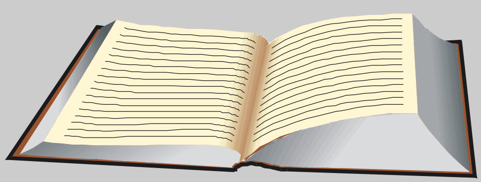
Επομένως, $e \cdot \ln \pi \leq \pi \Leftrightarrow \ln \pi^e \leq \ln e^\pi \Leftrightarrow \pi^e \leq e^\pi$.

Πιστεύουμε ότι αν στη διδασκαλία μας προηγηθεί μια τέτοια συζήτηση, τότε το ακροατήριο θα είναι πολύ πιο δεκτικό σε ότι θα ακολουθήσει, και αυτό θα είναι η μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, η οποία εμφανίστηκε στην παραπάνω έρευνα.

(Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (0, e] και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [e, +∞).

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε $\frac{\ln 10}{10} < \frac{\ln 9}{9}$, η οποία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $10^9 < 9^{10}$.

Ομοίως $\frac{\ln(0,5)}{0,5} < \frac{\ln(0,6)}{0,6}$, η οποία με τη σειρά της οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $(0,5)^{0,6} < (0,6)^{0,5}$ κ.λ.π.).



Συνάδελφοι,
διαδίδετε και προωθείτε τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ στους συναδέλφους και στους μαθητές σας.

Εύρεση εφαπτομένης πολυωνυμικής συνάρτησης

Γιάννης Απλακίδης
Μαθηματικός, Βέροια

Έστω αx + β το υπόλοιπο της διαίρεσης μιας πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) με το $(x - x_0)^2$.
Τότε η y = αx + β είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της P στο σημείο $(x_0, P(x_0))$.

Απόδειξη:

Έστω $P(x) = (x - x_0)^2\Pi(x) + \alpha x + \beta$

$P'(x) = 2(x - x_0)\cdot\Pi(x) + (x - x_0)^2\cdot\Pi'(x) + \alpha$

$P'(x_0) = \alpha$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(x_0, P(x_0))$ θα είναι:

$y - P(x_0) = P'(x_0)\cdot(x - x_0)$

$y - (\alpha x_0 + \beta) = \alpha\cdot(x - x_0)$

$y - \alpha x_0 - \beta = \alpha x - \alpha x_0$

$y = \alpha x + \beta$

Παράδειγμα:
Να προσδιοριστεί η εφαπτομένη της C_f με $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$, στο x = 2.

Απάντηση:

$x^3 - 2x^2 + x + 1 = (x - 2)^2\cdot(x + 2) + 5x - 7$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x = 2 είναι η: y = 5x – 7

Επαλήθευση:

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

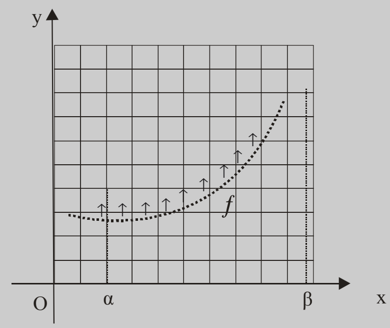
$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f'(2) = 12 - 8 + 1 = 5.$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x = 2 είναι η:

$$y - f(2) = f'(2)\cdot(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y - 3 = 5(x - 2)$$
$$y = 5x - 7$$

Οι Κυρτές Συναρτήσεις
στα πλαίσια ενός γεωμετρικού (ανα-)σχεδιασμού του ορισμού τους

Δημήτρης Ντρίζος,
Μαθηματικός, 6ο Ε.Λ. Τρικάλων



Περίληψη

Με την εργασία μας αυτή, διαμέσου μιας σειράς προβληματισμών που σχετίζονται με τη μορφή των γραφικών παραστάσεων των κυρτών συναρτήσεων, επιχειρούμε να "σχεδιάσουμε" καταρχήν έναν ορισμό, που να είναι συνεπής προς όλες τις κυρτές συναρτήσεις – και όχι μόνο στις παραγωγίσιμες με γνήσια αύξουσα τη συνάρτηση της πρώτης παραγώγου τους.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μια εφαρμογή, μέσα από την οποία αναδεικνύονται: πρώτον˙ η λειτουργική αξία του ορισμού και δεύτερον˙ η διασύνδεση του γεωμετρικού και του άμεσα επαγώμενου συναρτησιακού χαρακτήρα των κυρτών συναρτήσεων.

Εισαγωγή – Μία αξιοσημείωτη παρατήρηση

Στα πλαίσια του Προγράμματος Σπουδών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών κατεύθυνσης στη Γ΄ Λυκείου, οι **κυρτές συναρτήσεις** ορίζονται ως εξής:

> ***Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ,*** **(1.)**

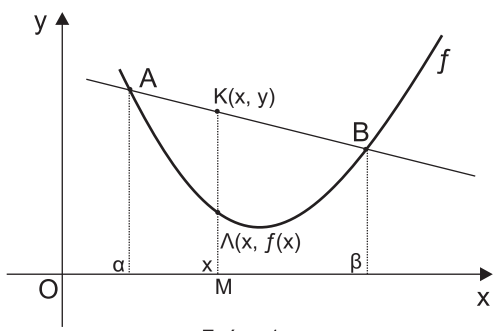
Βέβαια, ο ορισμός αυτός διατυπώνεται για μια συγκεκριμένη κλάση κυρτών συναρτήσεων – των παραγωγίσιμων˙ και μάλλον θα έπρεπε να χαρακτηρίζεται καλύτερα ως κριτήριο, ώστε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση να είναι κυρτή – και όχι ως ορισμός.

Στην πραγματικότητα, ο όρος κυρτή συνάρτηση είναι κατ' αρχήν γεωμετρικής υφής˙ δηλώνει τη μορφή που έχει η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης και, επομένως, σ' αυτό θα έπρεπε να εστιάζεται ένας ορισμός της κυρτής συνάρτησης – χωρίς την εμπλοκή της παραγώγου.

Η διασύνδεση των κυρτών συναρτήσεων με την έννοια της παραγώγου μπορεί να γίνει σε ένα επόμενο στάδιο της σπουδής τους – και (η διασύνδεση) να προκύπτει ως φυσικό αποτέλεσμα.

Στα πλαίσια των πρώτων αυτών επισημάνσεων, ένας αποδεκτός **ορισμός** είναι ο εξής **(2.)**:

> ***Μία συνάρτηση f ορίζεται ως κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, αν για κάθε α και β από το Δ, η γραφική παράσταση της f μεταξύ των σημείων Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.***[1]



Σχήμα 1

f κυρτή
και
$α < x < β$

Από τον ορισμό (2.) προκύπτει: ΛΜ < ΚΜ και ισοδύναμα $f(x) < y$.

Σχόλια:

1. Εντελώς ανάλογες είναι οι παρατηρήσεις μας για τον ορισμό και της κοίλης συνάρτησης.
2. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την κοίλη συνάρηση και ως εξής: *Μία συνάρτηση f, που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ, θα λέγεται* ***κοίλη*** *στο Δ, αν η συνάρτηση $-f$ είναι κυρτή στο Δ.*

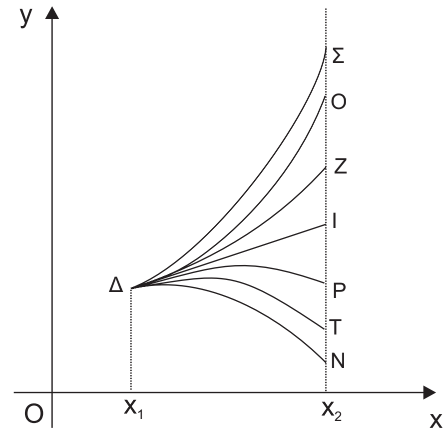
Διδακτικές προσεγγίσεις στην κατεύθυνση μιας γενίκευσης του ορισμού (2.)

1. Στο σχήμα 2, πάνω από την καμπύλη (ευθύγραμμο τμήμα) ΔΙ βρίσκονται όλες οι *κυρτές καμπύλες* σαν τις ΔΣ, ΔΟ, ΔΖ, ενώ κάτω από τη ΔΙ βρίσκονται οι *κοίλες καμπύλες* σαν τις ΔΝ, ΔΤ, ΔΡ.
[*Οι καμπύλες στις οποίες αναφερόμαστε είναι γραφικές παραστάσεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ΔΙ: $y = αx + β$, $α, β \in \mathbb{R}$*].

[1] Βλέπε π.χ. [2] σελ.6, [3] σελ. 43 και 44, [4] σελ. 85 και [5] σελ. 183. Για τη διασύνδεση δε του ορισμού (2) με την παράγωγο, βλέπε [4] σσ. 81-88.

Η καμπύλη ΔΙ χωρίζει τις κυρτές από τις κοίλες κατά έναν "οριακό" – θα μπορούσαμε να πούμε – τρόπο. Και το ερώτημα που αναδύεται είναι το εξής:

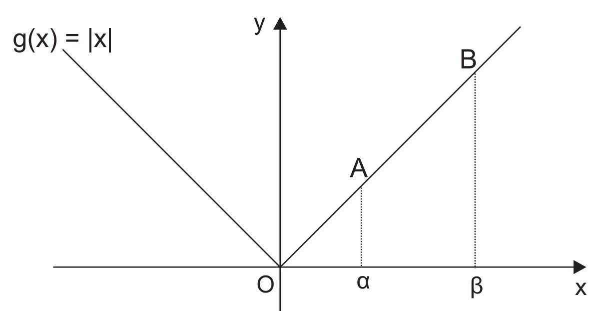
- *Πώς θα πρέπει να χαρακτηρίσουμε τη ΔΙ; κυρτή ή κοίλη;*
- *Μήπως θα ήταν λογική η απαίτησή μας να χαρακτηρίσουμε τη ΔΙ "οριακά" κυρτή και κοίλη συγρόνως;*



Σχήμα 2

Αν συμφωνούσαμε σ' αυτό, τότε το αμέσως επόμενο βήμα θα ήταν να τροποποιήσουμε κατάλληλα τον ορισμό (2.) για την κυρτή συνάρτηση (και τον ανάλογο για την κοίλη), έτσι ώστε η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$ να μπορεί να χαρακτηρίζεται και κυρτή και κοίλη, χωρίς τον επιπρόσθετο προσδιορισμό "οριακά" κυρτή και κοίλη. Βέβαια, ο νέος ορισμός θέλουμε να διατηρεί πάλι τη γεωμετρική του υφή.

2. Στο διπλανό σχήμα 3, η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x = 0. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (1.), η g δεν είναι κυρτή συνάρτηση. Θα μπορούσαμε όμως να ισχυριστούμε ότι η g δεν στρέφει τα κοίλα άνω!



Σχήμα 3

Ο ορισμός (2.), όπως αυτός διατυπώθηκε, επιτρέπει το χαρακτηρισμό της g ως κυρτής συνάρτησης;

Η απάντηση είναι και πάλι όχι. Και αυτό γιατί η γραφική παράσταση της g, μεταξύ των σημείων Α και Β (για παράδειγμα), ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και δεν βρίσκεται κάτω από αυτό.

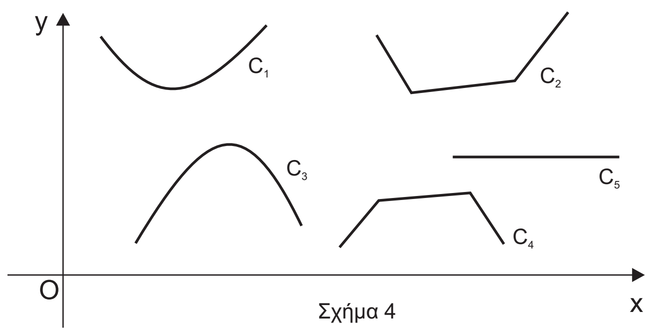
Στα πλαίσια μιας άλλης γεωμετρικής θεώρησης των κυρτών συναρτήσεων, η οποία να είναι σύμφωνη και προς τις απαιτήσεις που αναδείχτηκαν από τους προηγούμενους προβληματισμούς, επεκτείνουμε τον ορισμό (2.) ως εξής:

Μία συνάρτηση f ορίζεται ως κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, αν για κάθε α και β από το Δ, η γραφική παράσταση της f μεταξύ των σημείων Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) δεν βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Σχόλιο:

Εντελώς ανάλογα ορίζουμε και τις κοίλες συναρτήσεις. Εδώ η απαίτηση είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταξύ των Α και Β να μην βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Στο επόμενο σχήμα 4, σύμφωνα με τους τελευταίους ορισμούς, οι γραμμές C_1, C_2 είναι γραφικές παραστάσεις κυρτών συναρτήσεων και οι C_3, C_4 κοίλων συναρτήσεων, ενώ η C_5 είναι κυρτή και κοίλη.



Σχήμα 4

Δραστηριότητα στην τάξη:

Πάνω στη γραφική παράσταση μιας κυρτής συνάρτησης f να πάρετε τρία διαφορετικά σημεία Α, Γ, Β με τετμημένες αντίστοιχα α, x και β, ώστε:
$α < x < β$.
Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:
$λ_{ΑΓ}$, $λ_{ΑΒ}$ και $λ_{ΒΓ}$, όπου $λ_{ΑΓ}$, $λ_{ΑΒ}$, $λ_{ΒΓ}$ είναι οι κλίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.

Πρόταση:

Ανεξάρτητα από το αν η σπουδή των κυρτών συναρτήσεων στο Λύκειο επεκταθεί – ή όχι – και σε μη παραγωγίσιμες (σημειακά) συναρτήσεις, προτείνουμε **η εισαγωγή τους να γίνεται στα πλαίσια του γεωμετρικού ορισμού** (2.), όπως αυτός διατυπώθηκε αρχικά ή μετά την επέκτασή του.

Άλλωστε, σε μια πρώτη συζήτηση με τους μαθητές μας για την έννοια της κυρτής συνάρτησης, αυτό που καταρχήν κάνουμε, δεν είναι η απόδοση ενός συγκεκριμένου γεωμετρικού νοήματος στην έννοια; Γιατί λοιπόν αυτό να μην εμπλέκεται με καθαρό τρόπο και στη διατύπωση του ορισμού; Πολύ περισσότερο δε, όταν ο γεωμετρικός ορισμός (2.), όπως διαπιστώσαμε, είναι συγχρόνως και πιο γενικός από τον (1.).

Στην περίπτωση αποδοχής του ορισμού (2.), αντί του (1.), η διδακτική παρουσίαση θα πρέπει να ακολουθεί την εξής πορεία: Σε ένα πρώτο στάδιο "ανακαλύπτονται" και στη συνέχεια αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητες των κυρτών συναρτήσεων ως συνέπειες του ορισμού και της "γεωμετρίας" τους. Στο επόμενο στάδιο γίνεται η διασύνδεση της κυρτότητας με την παράγωγο (μονοτονία της πρώτης παραγώγου και πρόσημο της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης). Επίσης, όλες οι σχέσεις που προέκυψαν στο πρώτο στάδιο επαναβεβαιώνονται με τη συμβολή, πλέον, της παραγώγου.

Έτσι, μετά την παρουσίαση και του δεύτερου σταδίου, η άποψη ότι ο ορισμός (1.) προτιμάται ως πιο εύχρηστος διαδικαστικά (για την επίλυση ασκήσεων) δεν ευσταθεί.

Επισημαίνουμε, τέλος, ότι η πρότασή μας κινείται στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών, που θέλει τη γνώση να κατασκευάζεται σταδιακά στη βάση των πρώτων εμπειριών και της εποπτείας που έχουν οι μαθητές για τις μαθηματικές έννοιες.

Εφαρμογές στις κυρτές συναρτήσεις

Στη συνέχεια διατυπώνουμε μια σειρά βασικών (κλασσικών) ερωτημάτων στις κυρτές συναρτήσεις. Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι κάθε φορά, πριν από τη διαδικασία της διατύπωσης τυπικής απάντησης στα πλαίσια της Ανάλυσης, διερευνούμε τη δυνατότητα ανάδειξης κάποιας "γεωμετρικής μετάφρασης" των υποθέσεων και της μαθηματικής σχέσης που πρέπει να αποδείξουμε. Η αρμονική διασύνδεση, βήμα προς βήμα, αυτών των διαδικασιών προτείνεται για μια διδασκαλία στην τάξη.

Ένα βασικό παράδειγμα:

Με υπόθεση ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής και κυρτή στο κλειστό διάστημα [α, β], να αποδείξετε τους ισχυρισμούς:

(α) $f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2\cdot f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right), \quad x \in [\alpha, \beta]$

(β) $\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \dfrac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}, \quad x \in (\alpha, \beta)$

(γ) $\boldsymbol{f(x) \le \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta)+\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha), \quad x\in[\alpha, \beta]}$

(δ) $\boldsymbol{2(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\le 2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx\le(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right], \quad x\in[\alpha, \beta]}$

Σημείωση:

Η υπόθεση: *f συνεχής και κυρτή στο [α, β]*, θα μπορούσε ισοδύναμα να αντικατασταθεί από την υπόθεση: *f κυρτή στο [α, β] και συνεχής στα άκρα α και β*.

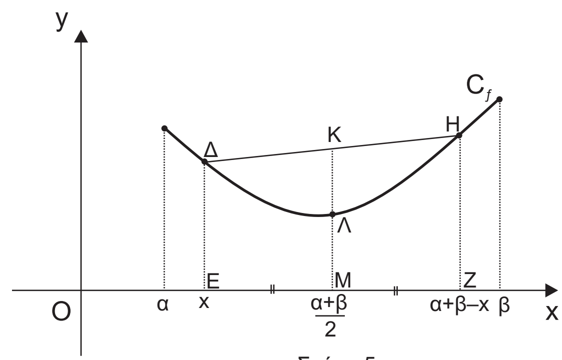
■ Για το ερώτημα (α):

Στο σχήμα 5, σε κάθε σημείο x του διαστήματος [α, β] αντιστοιχεί μονοσήμαντα το σημείο α + β – x.
Όπως εύκολα κανείς διαπιστώνει, τα σημεία:

$$x \quad \text{και} \quad \alpha+\beta-x$$

είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $\frac{\alpha+\beta}{2}$,

$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-x=\alpha+\beta-x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.



Σχήμα 5

Το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι, γενικά, τραπέζιο με βάσεις:

$$\text{ΔΕ} = f(x), \quad \text{ΗΖ} = f(\alpha+\beta-x)$$

και διάμεσο την ΚΜ = $\frac{1}{2}\cdot\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]$.

Όμως η f είναι κυρτή συνάρτηση, άρα από τον ορισμό (2.), θα ισχύει:

$$\text{ΛΜ} \le \text{ΚΜ},$$

(το "=" ισχύει όταν οι μεταβλητές x και α + β – x συμπέσουν στο σημείο $\frac{\alpha+\beta}{2}$).

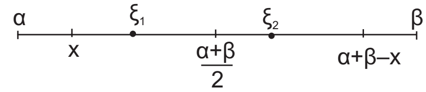
Και επειδή ΛΜ = $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και ΚΜ = $\frac{1}{2}\cdot\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]$,

η σχέση: ΛΜ≤ΚΜ γίνεται: $f(x)+f(\alpha+\beta-x)\ge 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$.

Ας δούμε τώρα και μια "πιο τυπική" απόδειξη του ερωτήματος (α) με τον συνήθη τρόπο, χωρίς την εμπλοκή του ορισμού (2.) ή της επέκτασής του.

Για την f ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange (Θ.Μ.Τ.) στα διαστήματα:

$$\left[x, \frac{\alpha+\beta}{2}\right] \text{και} \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta-x\right].$$



Σχήμα 5α

Επομένως υπάρχουν $\xi_1 \in \left(x, \frac{\alpha+\beta}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta-x\right)$, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(x)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - x} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha+\beta-x) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\alpha+\beta-x-\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Όμως είναι $\xi_1 < \xi_2$ και η συνάρτηση f' είναι γνήσια αύξουσα.

Άρα: $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(x) < f(\alpha+\beta-x) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$f(x) + f(\alpha+\beta-x) > 2 \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Παρατηρούμε ότι με $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, η τελευταία ισχύει ως "ισότητα".

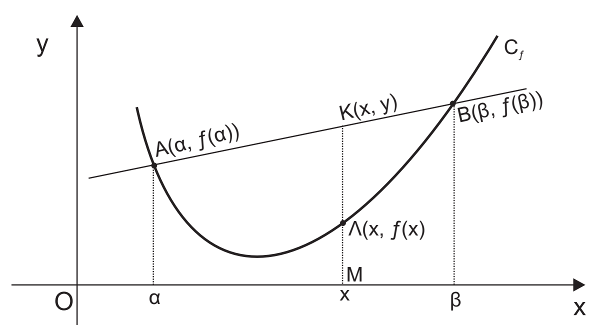
Οπότε, τελικά, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει: $f(x) + f(\alpha+\beta-x) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Σχόλιο:

Ο συνήθης ισχυρισμός, που διατυπώνεται, ότι η δεύτερη απόδειξη που δώσαμε στο ερώτημα (α) είναι πιο έγκυρη από την πρώτη, γιατί δεν στηρίζεται στη γεωμετρική εποπτεία, μάλλον δεν ευσταθεί. Και αυτό γιατί και το ίδιο το Θ.Μ.Τ. στη φυσική του εκδοχή διασυνδέεται πάλι με τη "γεωμετρία".

■ **Για το ερώτημα (β):**

Επειδή η f είναι κυρτή, σύμφωνα με τον ορισμό (2.), για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος [α, β],
θα ισχύει ΚΜ > ΛΜ
και ισοδύναμα $y > f(x)$, (1)



Σχήμα 6

Η ευθεία ΑΒ προσδιορίζεται από τις εξής ισοδύναμες αναλυτικές εξισώσεις:

$$\text{ΑΒ: } y - f(\alpha) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)\,, \qquad (2)$$

ή

$$\text{ΑΒ: } y - f(\beta) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\beta)\,, \qquad (2')$$

Η (1) λόγω της (2) διαδοχικά μας δίνει:

$$f(\alpha) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha) > f(x)$$

$$f(x) - f(\alpha) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)\,,$$

$$x > \alpha$$

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Η (1) λόγω της (2΄) διαδοχικά μας δίνει:

$$f(\beta) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\beta) > f(x)$$

$$f(x) - f(\beta) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\beta)\,,$$

$$x < \beta$$

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις παίρνουμε:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}\,,\ x\in(\alpha,\beta)$$

Η τελευταία προέκυψε λόγω της εμπλοκής της σχέσης $y > f(x)$, που οφείλεται στον ορισμό (2.) της κυρτής συνάρτησης.

Στα πλαίσια όμως της γενίκευσης του ορισμού (2.) ισχύει: $y \geq f(x)$
και η τελευταία σχέση, που αποδείξαμε, γίνεται:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}\,,\quad x\in(\alpha,\beta)$$

- **Για το ερώτημα (γ):**

Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}\,,\qquad \alpha < x < \beta$$

και διαδοχικά παίρνουμε:

$$(\beta-x)\cdot\left[f(x)-f(\alpha)\right] \leq (x-\alpha)\cdot\left[f(\beta)-f(x)\right]$$

$$(\beta - x)\cdot f(x) - (\beta - x)\cdot f(\alpha) \le (x - \alpha)\cdot f(\beta) - (x - \alpha)\cdot f(x)$$

$$\left[(\beta - x) + (x - \alpha)\right]\cdot f(x) \le (x - \alpha)\cdot f(\beta) + (\beta - x)\cdot f(\alpha)$$

$$(\beta - \alpha)\cdot f(x) \le (x - \alpha)\cdot f(\beta) + (\beta - x)\cdot f(\alpha)$$

$$f(x) \le \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha)$$

Η τελευταία σχέση έχει προκύψει για $x\in(\alpha, \beta)$.
Παρατηρούμε όμως ότι για $x = \alpha$ και για $x = \beta$ ισχύει ως "ισότητα".
Επομένως, τελικά, θα ισχύει:

$$f(x) \le \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha),\ \ x\in[\alpha, \beta]$$

■ **Για το ερώτημα (δ):**

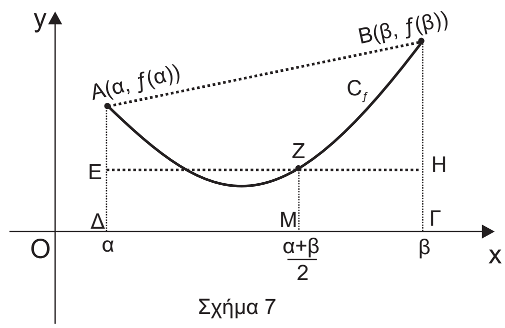
Καταρχήν θα επιχειρήσουμε να δούμε το γεωμετρικό νόημα που εμπεριέχεται στην προς απόδειξη σχέση:

$$(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \int_\alpha^\beta f(x)dx \le \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right], \quad (1)$$

$A\Delta = f(\alpha)$

$B\Gamma = f(\beta)$

$ZM = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$



Σχήμα 7

Στο σχήμα 7 παρατηρούμε ότι:

- $(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ = Εμβ. ορθογωνίου ΕΔΓΗ
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ = Εμβ. χωρίου ΑΖΒΓΔ
- $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$ = Εμβ. τραπεζίου ΑΒΓΔ

Οπότε η (1) γράφεται:

Εμβ. ορθ. ΕΔΓΗ ≤ Εμβ. χωρίου ΑΖΒΓΔ ≤ Εμβ. τραπ. ΑΒΓΔ, (2)
σχέση η οποία εποπτικά ισχύει.

Θα συνθέσουμε τώρα και μια "πιο τυπική" απόδειξη του ερωτήματος (δ).

Από το ερώτημα (α), για κάθε x∈[α, β] ισχύει:

$$f(x)+f(\alpha+\beta-x)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Άρα (⇒) $\int_\alpha^\beta\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]dx\geq\int_\alpha^\beta 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx$

και ισοδύναμα: $\int_\alpha^\beta f(x)dx+\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha)$, (3)

Στο σημείο αυτό, αν δούμε προσεκτικά τη σχέση που θέλουμε ν' αποδείξουμε, διαπιστώνουμε ότι είναι αναγκαίο ν' αποδειχθεί ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx, \qquad (4)$$

Η τυπική απόδειξη της (4) γίνεται πολύ απλά με αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης: α + β – x = u, κ.τλ.

(*Για μια αξιοσημείωτη γεωμετρική ερμηνεία της (4), βλέπε: [4], σελ. 118 και 119*)

Μετά την απόδειξη της (4), η (3) μας δίνει:

$$2(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leq 2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx,\quad x\in[\alpha,\beta]$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του (δ) ερωτήματος, αρκεί πλέον να αποδειχτεί ότι για κάθε x∈[α, β] ισχύει και:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$$

Στο ερώτημα (γ) αποδείξαμε ότι:

$$f(x)\leq\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta)+\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha),\quad x\in[\alpha,\beta]$$

Άρα (⇒) $\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta\left[\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)+\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(\beta-x)\right]dx$, (5)

Το 2ο μέλος της σχέσης (5) διαδοχικά γίνεται:

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)dx+\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta(\beta-x)dx$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\alpha\cdot x\right]_\alpha^\beta+\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\left[\beta\cdot x-\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot\left(\frac{\beta^2}{2}-\alpha\cdot\beta-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^2\right)+\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot\left(\beta^2-\frac{\beta^2}{2}-\alpha\cdot\beta+\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot\left[\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2}-\alpha\cdot(\beta-\alpha)\right]+\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot\left[\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{2}-\beta\cdot(\alpha-\beta)\right]$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot f(\beta)-\alpha\cdot f(\beta)-\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot f(\alpha)+\beta\cdot f(\alpha)$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\cdot f(\beta)+\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot f(\alpha)$$

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot f(\beta)+\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot f(\alpha)$$

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right].$$

Επομένως η (5) γίνεται: $2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx\le(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$

(*Για μια άλλη απόδειξη του ερωτήματος (δ), βλέπε [1], σελ. 380*).

Επισήμανση:

Για καθαρά διδακτικούς λόγους, η γεωμετρική προσέγγιση των ερωτημάτων του βασικού θέματος, έγινε με την επιπρόσθετη θεώρηση ότι **η *f* παίρνει μη αρνητικές τιμές**.

Γενικές παρατηρήσεις

1. Ο προσεκτικός αναγνώστης θα έχει παρατηρήσει ότι σ' όλα τα προηγούμενα **είναι εμφανής η προτίμησή μας στη χρήση του γεωμετρικού ορισμού** (2.) των κυρτών συναρτήσεων, παρά στο Θ.Μ.Τ. και στον ορισμό (1.).

2. Όλα τα ερωτήματα που αναλύσαμε παραπάνω, τα συναντά κανείς διάσπαρτα σε διάφορα συγγράμματα Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Έχουμε τη γνώμη ότι στη στοιχειώδη Ανάλυση, που διαμορφώθηκε τελεσίδικα πριν από τρεις περίπου αιώνες, **το πιο ουσιαστικό, που έχει να προσθέσει πλέον κανείς, είναι διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις** με στόχο μια αποτελεσματικότερη διδασκαλία για τον αποδέκτη μαθητή.

Αντί επιλόγου

Στα πλαίσια του γενικότερου προβληματισμού: "*Καθαρές αποδείξεις στα αυστηρά πλαίσια της αξιωματικής θεμελίωσης της Ανάλυσης ή αποδείξεις στη βάση της διασύνδεσης της Ανάλυσης με τη Γεωμετρία;*" παραθέτουμε την άποψη του μεγάλου μαθηματικού **René Baire**, που συγκαταλέγεται μάλιστα μεταξύ εκείνων που είναι υπέρ των αυστηρών διατυπώσεων.

Στο "*Leçons sur les Théories Générales de l' Analyse*", Gauthier-Villars, T.I. Paris, 1907, γράφει:

> "*Λέγεται συχνά ότι η Ανάλυση μπορεί να χτισθεί ξεκινώντας από την έννοια του ακεραίου αριθμού και μόνο. Αυτό είναι ακριβές, αλλά, αν θελήσουμε να ακολουθήσουμε συστηματικά αυτήν την άποψη˙ αν συγκεκριμένα θελήσουμε να αγνοήσουμε τη Γεωμετρία, θα στερηθούμε με τη θέλησή μας από μια πολύτιμη βοήθεια και, σε πολλές περιπτώσεις, θα καταδικαστούμε σε μακροσκελείς παρεκβάσεις. Πιστεύω λοιπόν ότι είναι προτιμότερο να προσπαθήσουμε να νομιμοποιήσουμε τα αμοιβαία δάνεια, που ανταλλάσουν στην πραγματικότητα η Ανάλυση και η Γεωμετρία.*"

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] Καζαντζής, Θ. (1994). "*Ολοκληρώματα*", Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη (Χ. Βαφειάδης), Θεσσαλονίκη.

[2] Μάκρας, Στρ. (1994). "*Κυρτές συναρτήσεις*", άρθρο στο περιοδικό "Ευκλείδης Β΄", έκδοση της Ε.Μ.Ε., τεύχος Πρώτο, Αθήνα.

[3] Νεγρεπόντης, Σ. – Γιωτόπουλος, Σ. – Γιαννακούλιας, Ε. (1993). "*Απειροστικός Λογισμός*", τόμος ΙΙ, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.

[4] Ντρίζος, Δ. (2002). "*Ο ρόλος των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της Ανάλυσης*" – Διπλωματική Εργασία για την απόκτηση Μ.Δ.Ε., τμ. Μαθηματικών Παν. Αθηνών.

[5] Spivak, M. (1991). "*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*", μτφ. Γιαννόπουλος, Α., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.

Μια πλήρης και απλή ανάπτυξη της έννοιας του εμβαδού

Δεργιαδές Νικόλαος
Μαθηματικός, Θεσσαλονίκη

Μετά την ανάπτυξη της έννοιας της ισότητας δύο σχημάτων, ο μαθηματικός κόσμος προχώρησε στην ανάπτυξη της έννοιας των ισοδύναμων σχημάτων. Η κινητήρια δύναμη για την έννοια αυτή ήταν η ανάγκη χαρακτηρισμού των σχημάτων, ως προς την επιφάνεια την οποία καλύπτουν. Μια έννοια χρησιμότατη για τον δίκαιο χωρισμό της γης στους γεωργούς.

Η ενασχόληση με την έννοια αυτή, και η προσπάθεια του να βρεθεί αν δύο σχήματα είναι ισοδύναμα οδήγησε κατ' αρχήν στην προσπάθεια να χωρισθεί το πρώτο σχήμα σε κάποιο αριθμό άλλων σχημάτων και με αυτά τα κομμάτια να δημιουργηθεί το άλλο σχήμα. Η προσπάθεια αυτή είχε αίσιο αποτέλεσμα για κάποιες απλές περιπτώσεις. Γρήγορα όμως η διαπίστωση της δυσκολίας της μεθόδου τεμαχισμού, οδήγησε στην επινόηση της έμεσης αλγεβρικής μεθόδου, της του εμβαδού.

Εδώ και 50 χρόνια περίπου στα σχολικά ή τα εξωσχολικά βιβλία, η έννοια του εμβαδού κατά κανόνα αξιωματικά οριζόμενη, ως η απεικόνιση του συνόλου των σχημάτων στο σύνολο των θετικών πραγματικών, με τις γνωστές ιδιότητες, εφαρμοζόμενη και αποδεικνυόμενη, με τα γνωστά παρατράγουδα των ασυμμέτρων, στα ορθογώνια παραλληλόγραμμα (παλαιότερες Γεωμετρίες) ή στο τετράγωνο (τα τελευταία χρόνια) επεκτεινόταν στη συνέχεια και στα άλλα σχήματα.

Στα βιβλία αυτά υπήρχε αμυδρά η σύνδεση του εμβαδού με την έννοια της επιφάνειας, αλλά υπήρχε και η δυσκολία αυστηρής απόδειξης κάποιων πραγμάτων (με συνέπεια οι σχετικές αποδείξεις ή να παραλείπονται ή να πετάγονται στο τέλος του βιβλίου).

Σε άλλα, για την ευκολία απόδειξης, η εισαγωγή στην έννοια του εμβαδού ήταν άμεση και φορμαλιστική.

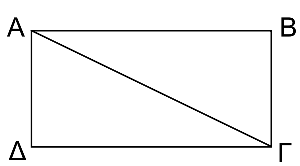
Τεχνικές όμως που να φαίνεται, σε απλές περιπτώσεις, πώς τεμαχίζουμε ένα σχήμα και ανασυνθέτουμε κάποιο που είναι ισοδύναμό του υπήρχαν ελάχιστες, και το σοβαρότερο είναι ότι αγνοούσαν ή και αγνοούν ακόμη και σήμερα οι μαθηματικοί, ότι όταν δύο ευθύγραμμα σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδό δεν σημαίνει απλώς ότι έχουν και την ίδια επιφάνεια (όπως πράγματι μπορεί να συμβαίνει με έναν κύκλο και ένα τετράγωνο) αλλά και ότι μπορούμε να τεμαχίσουμε (σε πεπερασμένο πλήθος τεμαχίων) το ένα και να ανασυνθέσουμε το άλλο.

Εκείνος ο οποίος κατ' εξοχήν προσπάθησε να έχει πιο πλήρη και αυστηρή θεωρία εμβαδού αλλά και συνδεδεμένη με την έννοια της επιφάνειας ήταν ο Σ. Κανέλλος. Η Γεωμετρία του όμως δυστυχώς υπήρξε ογκώδης και απροσπέλαστη για μαθητές.

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν την σύντομη αυτή ανασκόπηση της ελληνικής βιβλιογραφίας στο θέμα του εμβαδού, θα λέγαμε ότι καλώς για λόγους παιδαγωγικούς κρατήθηκε, η ανάπτυξη της θεωρίας σε χαμηλούς τόνους (έστω και με κάποιες επιστημονικές αβαρίες), αλλά από την άλλη πλευρά για την μαθηματική σκέψη δεν παύει να είναι πρόκληση η εμπλοκή της έννοιας των ασυμμέτρων στη θεωρία του εμβαδού, η άγνοια του τεμαχισμού ισοδυνάμων σχημάτων καθώς και η ύπαρξη κάποιων ευτράπελων στην όλη ανάπτυξη της θεωρίας.

Π.χ. στα περισσότερα βιβλία, γράφεται ότι το εμβαδό παραλληλογράμμου δίνεται από τον τύπο $\beta_1 \cdot \upsilon_1 = \beta_2 \cdot \upsilon_2$ το οποίο δεν έχει αποδειχθεί (η απόδειξη μπορεί να γίνει με όμοια τρίγωνα), διότι απλούστατα η προηγηθείσα απόδειξη ότι παραλληλόγραμμο με βάση β και ύψος υ είναι ισοδύναμο με ορθογώνιο βάσης β και ύψους υ, στηρίζεται σε πονηρό τεμαχισμό ο οποίος δεν ισχύει γενικώς όταν η βάση β είναι η μικρή βάση του παραλληλογράμμου.

Με την θεωρία που ακολουθεί παρακάτω, έχουμε τη γνώμη ότι προσφέρουμε στην ελληνική βιβλιογραφία μία απλούστατη και πρωτότυπη απόδειξη για το εμβαδό ορθογωνίου, χωρίς τη χρήση της έννοιας του ασυμμέτρου αριθμού, επί πλέον μια πλήρη θεωρητική επιβεβαίωση, με επαρκή παραδείγματα, του γεγονότος ότι όταν έχουμε ισεμβαδικά ευθύγραμμα σχήματα σημαίνει και ότι μπορούμε να τεμαχίσουμε το ένα και να ανασυνθέσουμε το άλλο, και σε τελική ανάλυση μια θεωρία κατά πολύ απλούστερη αλλά και πληρέστερη στο εισαγωγικό της μέρος από τις υπάρχουσες.



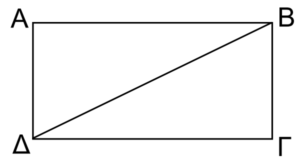
Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ τεμαχίζεται από την διαγώνιο ΑΓ σε δύο τρίγωνα {ΑΒΓ, ΑΔΓ} και θα μπορούσαμε να τεμαχίσουμε το ορθογώνιο σε περισσότερα σχήματα με πολλά ευθύγραμμα τμήματα.

- **Ορισμός:**

Ονομάζουμε **τεμαχισμό** ενός ευθυγράμμου σχήματος το σύνολο των ευθυγράμμων σχημάτων, στα οποία χωρίζεται το σχήμα από ένα πεπερασμένο πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων.

- **Ορισμός:**

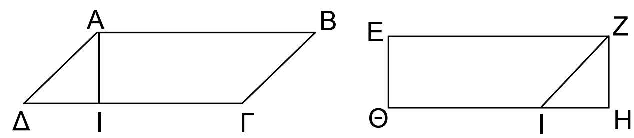
Ονομάζουμε **πλέγμα** ενός τεμαχισμού το σχήμα που σχηματίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούν τον τεμαχισμό.



Εκτός από τον προηγούμενο τεμαχισμό τ_1 του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με την διαγώνιο ΑΓ θα μπορούσαμε να έχουμε και ένα δεύτερο τεμαχισμό τ_2 με την διαγώνιο ΒΔ.

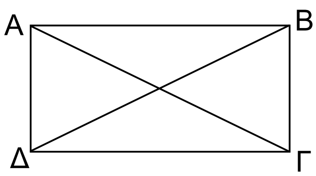
Είναι φανερό ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση τα σχήματα του τ_1 είναι αντίστοιχα ίσα με τα σχήματα του τ_2.

Και το ίδιο φαινόμενο θα μπορούσε να παρατηρηθεί και σε διαφορετικά σχήματα π.χ. ο τ_1 σε παραλληλόγραμμο και ο τ_2 σε ορθογώνιο.



- **Ορισμός:**

Λέμε ότι δύο τεμαχισμοί τ_1 και τ_2 δύο σχημάτων είναι ίσοι $\boldsymbol{\tau_1 = \tau_2}$ όταν τα σχήματα του τ_1 είναι αντίστοιχα ίσα με τα σχήματα του τ_2.



Αν τώρα στο πλέγμα του τ_1 του αρχικού ορθογωνίου ΑΒΓΔ σχεδιάσουμε το πλέγμα του τ_2 αποκτούμε ένα σύνθετο πλέγμα που δημιουργεί ένα νέο τεμαχισμό, ο οποίος είναι ο ίδιος αν στο πλέγμα του τ_2 σχεδιάσουμε το πλέγμα του τ_1 και ο οποίος τώρα περιέχει τέσσερα σχήματα.

- **Ορισμός:**

Ονομάζουμε **σύνθεση** δύο τεμαχισμών τ_1 και τ_2 του ίδιου σχήματος τον τεμαχισμό που προκύπτει αν στο πλέγμα του τ_1 σχεδιάσουμε το πλέγμα του τ_2.

Μετά από αυτούς τους ορισμούς, ερχόμαστε στο να αντιμετωπίσουμε την έννοια της **επιφάνειας** που καλύπτει ένα ευθύγραμμο σχήμα με τη βοήθεια της έννοιας του **εμβαδού** που είναι ένας μοναδικός θετικός αριθμός που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη επιφάνεια.

- **Ορισμός:**

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέμε ότι έχουν την ίδια **επιφάνεια** ή ότι είναι **ισοδύναμα** όταν υπάρχει τεμαχισμός τ_1 του ενός και τ_2 του άλλου που είναι ίσοι μεταξύ τους.

Δηλαδή δύο ευθύγραμμα σχήματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους όταν είναι δυνατό να τεμαχίσουμε το ένα και με τα σχήματα του τεμαχισμού να σχηματίσω (ανασυνθέσω) το άλλο σχήμα.

Είναι φανερό ότι αν τεμαχίσουμε ένα σχήμα $Σ_1$ και με τα κομμάτια σχηματίσουμε ένα σχήμα $Σ_2$ δεν είναι δυνατόν το $Σ_1$ να είναι υποτμήμα του $Σ_2$.

Άρα:

- **Πόρισμα:**

  Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι δύο τετράγωνα ισοδύναμα, είναι να είναι ίσα μεταξύ τους.

- **Πόρισμα:**

  Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το ορθογώνιο με πλευρές α, β και το ορθογώνιο με πλευρές α, γ ισοδύναμα, είναι η σχέση β = γ.

- **Θεώρημα:**

  Αν δύο σχήματα είναι ισοδύναμα προς τρίτο είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.

Απόδειξη:

Επειδή το $Σ_1$ είναι ισοδύναμο του Σ υπάρχει τεμαχισμός $τ_1$ του $Σ_1$ που είναι τεμαχισμός του Σ.

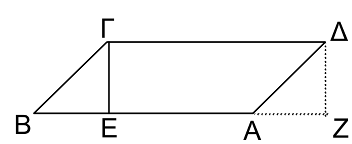
Ομοίως υπάρχει τεμαχισμός $τ_2$ του $Σ_2$ που είναι και τεμαχισμός του Σ.

Αν θεωρήσουμε την σύνθεση τ των $τ_1$ και $τ_2$ τότε ο τεμαχισμός τ του Σ μπορεί να δομήσει και το σχήμα $Σ_1$ και το σχήμα $Σ_2$ δηλαδή τα σχήματα αυτά είναι μεταξύ τους ισοδύναμα.

- **Θεώρημα:**

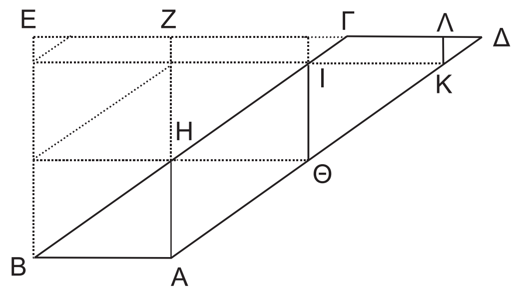
  Κάθε παραλληλόγραμμο με βάση β και ύψος υ είναι ισοδύναμο με ορθογώνιο πλευρών β και υ.

Απόδειξη:



Αν η βάση ΑΒ = β είναι η μεγαλύτερη βάση του παραλληλογράμμου τότε φέρνοντας το ύψος ΓΕ = υ από την κορυφή μιας αμβλείας γωνίας, όπου ΒΕ < ΒΓ < ΑΒ πετυχαίνουμε τεμαχισμό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (με 2 τεμάχια) ίσο με τον τεμαχισμό του ορθογωνίου ΓΕΖΔ το οποίο έχει πλευρές β και υ.

Αν όμως η βάση ΑΒ = β είναι η μικρότερη βάση του παραλληλογράμμου, τότε όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα από την κορυφή Α μιας αμβλείας γωνίας φέρνουμε κάθετα και παράλληλα προς την ΑΒ ευθύγραμμα τμήματα δημιουργώντας την τεθλασμένη ΑΗΘΙΚΛ ώσπου να φθάσουμε στο Λ επί της άλλης βάσης ΓΔ.

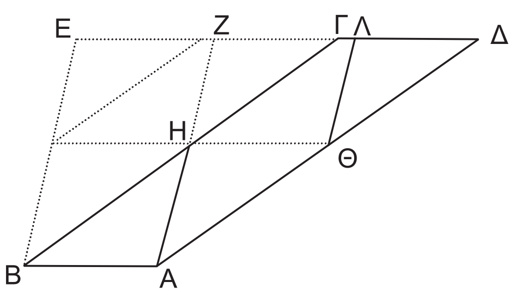


Έτσι δημιουργούμε τεμαχισμό (με 4 τεμάχια στο σχήμα αυτό) του παραλληλογράμμου ίσο με τον τεμαχισμό του ορθογωνίου ΑΒΕΖ το οποίο έχει πλευρές β και υ.

Συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι το παρακάτω.

- **Πόρισμα:**

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι δύο παραλληλόγραμμα, με την ίδια βάση, ισοδύναμα είναι να έχουν ίσα τα ύψη που αντιστοιχούν στη βάση αυτή.



Βέβαια για να ανασυνθέσουμε από το ένα παραλληλόγραμμο το άλλο σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα χρειάζεται πρώτα να ανασυνθέσουμε σαν ενδιάμεσο το ισοδύναμο ορθογώνιο.

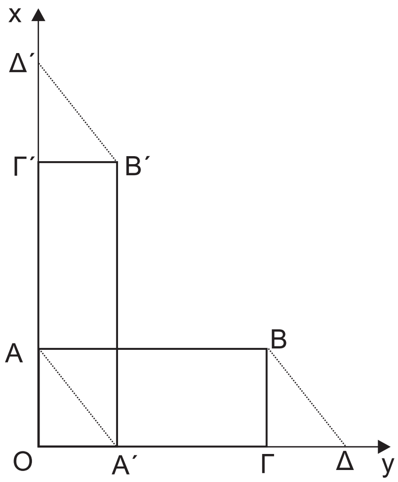
Θα μπορούσαμε όμως και άμεσα με την τομή ΑΗΘΛ, να ανασυνθέσουμε (με 3 τεμάχια) από το ΑΒΓΔ το ΑΒΕΖ.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η ισοδυναμία δύο ορθογωνίων εξαρτάται από έναν θετικό αριθμό που είναι το γινόμενο των πλευρών του καθενός, δηλαδή έχουμε το παρακάτω σημαντικό θεώρημα, με το οποίο αποφεύγουμε (τον σκόπελο για τις δυνατότητες των μαθητών) να μπλεχτούμε με την έννοια του ασύμμετρου αριθμού.

- **Θεώρημα:**

Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το ορθογώνιο με πλευρές α, β και το ορθογώνιο με πλευρές α΄, β΄ ισοδύναμα, είναι η σχέση αβ = α΄β΄.

Απόδειξη:



Τοποθετούμε τα ορθογώνια στις πλευρές μιάς ορθής γωνίας xOy όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα όπου ΟΑ = α, ΑΒ = β, ΟΑ΄ = α΄, Α΄Β΄ = β΄ και έστω ότι οι μικρές πλευρές των ορθογωνίων είναι οι ΟΑ και ΟΑ΄.

Αν φέρουμε τις ΒΔ και Β΄Δ΄ παράλληλες προς την ΑΑ΄ τότε το παραλληλόγραμμο ΑΑ΄ΔΒ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΟΑΒΓ και το παραλληλόγραμμο ΑΑ΄Β΄Δ΄ είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο ΟΑ΄Β΄Γ΄.

Δηλαδή τα ορθογώνιά μας είναι ισοδύνα μα αν και μόνο αν τα παραλληλόγραμμα ΑΑ΄ΔΒ, ΑΑ΄Β΄Δ΄ έχουν ίσα τα ύψη που αντιστοιχούν στην κοινή τους βάση ΑΑ΄.

Άρα τα σημεία Δ΄, Β΄, Β, Δ βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς την ΑΑ΄ και κατά το **Θεώρημα του Θαλή** θα έχουμε:

$$\frac{ΟΑ}{ΑΔ'} = \frac{ΟΑ'}{Α'Δ} \quad ή \quad \frac{α}{β'} = \frac{α'}{β} \quad ή \quad αβ = α'β' \quad ■$$

Δηλαδή αν για δύο ορθογώνια ισχύει αβ = α΄β΄ αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να τεμαχίσουμε το ένα σε τρία τεμάχια στο προηγούμενο σχήμα και να ανασυνθέσουμε το άλλο. ΄Αρα καταλήγουμε στο παρακάτω:

- **Πόρισμα:**

  Όταν δοθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορούμε να κατασκευάσουμε ισοδύναμό του με μήκος βάσης οποιονδήποτε θετικό αριθμό.

Ονομάζουμε εμβαδόν Ε ενός ορθογωνίου το γινόμενο των πλευρών του. Δηλαδή το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $Ε = α^2$.

- **Ορισμός:**

  Όταν ένα σχήμα είναι ισοδύναμο με ορθογώνιο ονομάζουμε **εμβαδόν** του σχήματος το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Είναι φανερό ότι αυτός ο αριθμός είναι μοναδικός και ο ορισμός αυτός του εμβαδού μας οδηγεί στα παρακάτω συμπεράσματα:

- **Πόρισμα:**

  Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου είναι Ε = β·υ όπου β είναι μία οποιαδήποτε βάση και υ το αντίστοιχο σ' αυτή ύψος.

- **Πόρισμα:**

  Αν δύο ευθύγραμμα σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδό, τότε είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, δηλαδή μπορούμε να τεμαχίσουμε το ένα και με τα κομμάτια να ανασυνθέσουμε το άλλο.

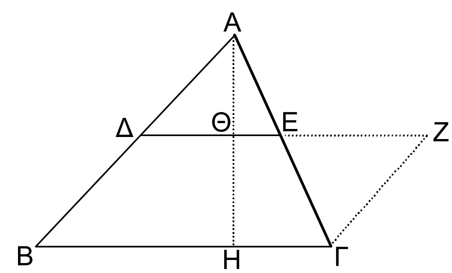
Απόδειξη:
Πράγματι τα δύο σχήματα είναι ισοδύναμα προς το ίδιο ορθογώνιο.

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι κάθε πολύγωνο έχει εμβαδόν.

- **Θεώρημα:**

  Το εμβαδό τριγώνου με βάση β καί ύψος υ είναι Ε = $\frac{1}{2}$β·υ.

Απόδειξη:



Αν Δ, Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ τότε ο τεμαχισμός του ΑΒΓ που δημιουργεί η ΔΕ είναι ίσος με τον τεμαχισμό του παραλληλογράμμου ΔΖΓΒ, που έχει βάση την ΒΓ = β και ύψος ΘΗ = $\frac{υ}{2}$. Δηλαδή το τρίγωνο είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο, άρα Ε = $\frac{1}{2}$β·υ.

Δηλαδή κάθε τρίγωνο με τεμαχισμό μπορεί να μετατραπεί σε ορθογώνιο με βάση β και ύψος $\frac{1}{2}$υ ή ακόμη μπορεί να μετατραπεί σε ορθογώνιο με οποιαδήποτε βάση.

Αν τώρα ένα σχήμα Σ χωρίζεται στα σχήματα $Σ_1$, $Σ_2$, ..., $Σ_ν$ λέμε ότι το Σ είναι το άθροισμα των $Σ_1$, ..., $Σ_ν$ δηλαδή $Σ = Σ_1 + Σ_2 + ... + Σ_ν$ και ότι

- **Θεώρημα:**

  Αν τα σχήματα $Σ_1$, $Σ_2$, ..., $Σ_ν$ έχουν εμβαδό τότε:

$$Ε(Σ_1 + Σ_2, + ... + Σ_ν) = Ε(Σ_1) + Ε(Σ_2) + ... + Ε(Σ_ν).$$

Απόδειξη:

Επειδή το $Σ_1$ έχει εμβαδό σημαίνει ότι με τεμαχισμό μπορεί να γίνει ισοδύναμο με ορθογώνιο πλάτους α και μήκους x_1.

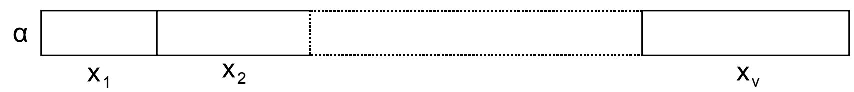
Δηλαδή: $Ε(Σ_1) = α \cdot x_1$ Ομοίως:

$Ε(Σ_2) = α \cdot x_2$

$\vdots$

$Ε(Σ_ν) = α \cdot x_ν$ Άρα:

το Σ είναι ισοδύναμο με ορθογώνιο πλάτους α και μήκους $x_1 + x_2 + ... + x_ν$.



Δηλαδή $Ε(Σ) = α \cdot (x_1 + x_2 + ... + x_ν) = α \cdot x_1 + α \cdot x_2 + ... + α \cdot x_ν$ άρα:

$$Ε(Σ_1 + Σ_2, + ... + Σ_ν) = Ε(Σ_1) + Ε(Σ_2) + ... + Ε(Σ_ν).$$

- **Πόρισμα:**

  Κάθε ευθύγραμμο σχήμα έχει εμβαδό, το οποίο υπακούει στην προσθετική ιδιότητα.

Απόδειξη:

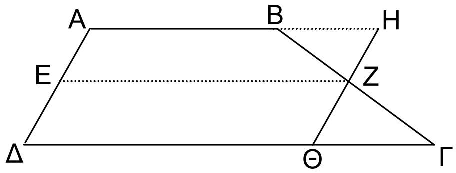
Πράγματι κάθε ευθύγραμμο σχήμα μπορεί να χωρισθεί σε τρίγωνα τα οποία αποδείξαμε ότι είναι σχήματα που έχουν εμβαδόν.
Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, το κάθε ευθύγραμμο σχήμα έχει εμβαδόν, και ιδιότητα αυτού όπως δείξαμε προηγουμένως είναι **το εμβαδόν αθροίσματος σχημάτων είναι το άθροισμα των εμβαδών των σχημάτων αυτών.**
Συνεπώς κάθε ευθύγραμμο σχήμα μπορούμε να το τεμαχίσουμε (πεπερασμένο πλέγμα) και με τα κομμάτια να δημιουργήσουμε ορθογώνιο.

Βεβαίως σύμφωνα με τη θεωρία που προηγήθηκε ο τεμαχισμός αυτός μπορεί να είναι μια πολύπλοκη διαδικασία οπότε μια πρόκληση που αναδύεται είναι η εύρεση του βέλτιστου τεμαχισμού. π.χ. για κάθε τραπέζιο ο βέλτιστος αυτός τεμαχισμός περιγράφεται στο παρακάτω

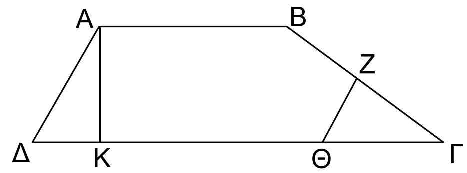
- **Θεώρημα:**

  Αν μ είναι η διάμεσος τραπεζίου, υ το ύψος του και $β_1$, $β_2$ οι βάσεις του, τότε το τραπέζιο είναι ισοδύναμο με ορθογώνιο πλευρών μ, υ δηλαδή $Ε = μ \cdot υ = \frac{β_1 + β_2}{2} \cdot υ$

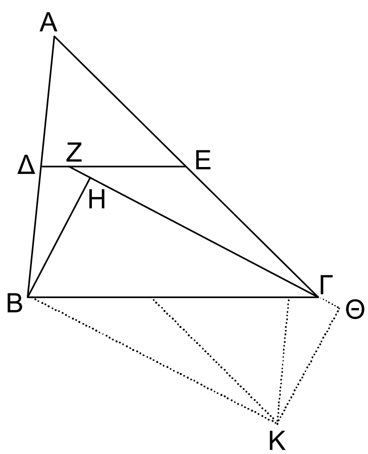
Απόδειξη:



Αν ΕΖ = μ είναι η διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ το ΘΖΗ ευθύγ. τμήμα είναι παράλληλο προς την ΑΔ τότε ο τεμαχισμός του ΘΖ στο τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ίσος με τον τεμαχισμό του ΒΖ στο παραλληλόγραμμο ΑΗΘΔ το οποίο έχει βάση ΔΘ = ΕΖ = μ και ύψος υ.



Άρα Ε = μ·υ = $\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\cdot υ$ και συνεπώς ο βέλτιστος τεμαχισμός του τραπεζίου που μας οδηγεί στην κατασκευή ορθογωνίου περιέχει τρία τεμάχια που δημιουργούνται από το ΘΖ || ΑΔ και το ΑΚ ⊥ ΔΓ. ■



Και ο πιο σημαντικός τεμαχισμός, που οδηγεί στην μετατροπή ενός τριγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο με καθορισμένη μία του πλευρά, θα μπορούσε να περιέχει μόνο τέσσερα τεμάχια, αν υπήρχε σημείο Ζ επί της ΔΕ, όπου Δ, Ε τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ ώστε το ΓΖ να είναι ίσο με την πλευρά του ζητουμένου ορθογωνίου και το ίχνος Η της ΒΗ ⊥ ΓΖ βρισκόταν εντός του τραπεζίου ΔΕΓΒ, τότε θα ανασυνθέταμε από τα τέσσερα κομμάτια του τριγώνου, το ορθογώνιο ΒΗΘΚ, όπου ΗΘ = ΖΓ.

(*Για τον τεμαχισμό αυτόν βλέπε σελ. 90 Mathematical recreations and essays W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter*)

Ένα άλλο απαράδεκτο των σχολικών βιβλίων μας είναι η στεγανοποίηση της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας, ώστε να επιμένουμε όλες οι αποδείξεις μας να γίνονται με γεωμετρικό τρόπο.

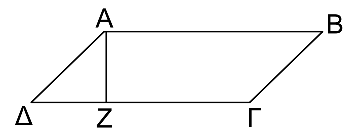
Επειδή όλες οι γωνίες ενός παραλληλογράμμου έχουν το ίδιο ημίτονο προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

■ **Θεώρημα:**

Αν α και β είναι οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου και ω μια οποιαδήποτε γωνία του τότε το εμβαδό του είναι Ε = α·β·ημω

Απόδειξη:

Αν α = ΑΔ, β = ΔΓ, ΑΖ είναι ύψος του παραλληλογράμμου και η γωνία Δ είναι οξεία τότε:



$$E = ΔΓ \cdot ΑΖ = ΔΓ \cdot ΑΔ \cdot ημΔ = α \cdot β \cdot ημω.$$

- **Πόρισμα:**
  Το εμβαδό ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τους τύπους

$$\mathbf{E = \frac{1}{2}β \cdot γ \cdot ημΑ = \frac{1}{2}γ \cdot α \cdot ημΒ = \frac{1}{2}α \cdot β \cdot ημΓ}$$

- **Θεώρημα:**
  Αν οι γωνίες Α και Α΄ των τριγώνων ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσες ή παραπληρωματικές τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη:

Οι γωνίες έχουν ίσα ημίτονα, ημΑ = ημΑ΄.

$$\text{Άρα: } \frac{(ΑΒΓ)}{(Α΄Β΄Γ΄)} = \frac{\frac{1}{2}βγημΑ}{\frac{1}{2}β΄γ΄ημΑ΄} = \frac{βγ}{β΄γ΄}$$

- **Θεώρημα:**
  Το εμβαδό τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος $\frac{α+β+γ}{2}$ του τριγώνου.

Απόδειξη:

Ο νόμος συνημιτόνων $2β \cdot γ \cdot συνΑ = β^2 + γ^2 - α^2$ δίνει:

$$E = \frac{1}{2}β \cdot γ \cdot ημΑ = \frac{1}{2}β \cdot γ\sqrt{1-συν^2Α} = \sqrt{\frac{4β^2 \cdot γ^2 - (β^2+γ^2-α^2)^2}{16}} \quad ή$$

$$E = \sqrt{\frac{(α+β+γ)(-α+β+γ)(α-β+γ)(α+β-γ)}{16}} = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

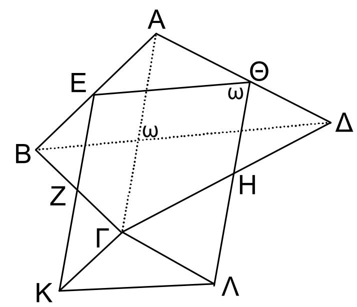
- **Θεώρημα:**

Το εμβαδό τυχαίου κυρτού τετραπλεύρου δίνεται από τον τύπο: $\mathbf{E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot ημω}$

όπου δ_1, δ_2 είναι οι διαγώνιοι και ω είναι η γωνία των διαγωνίων.

Απόδειξη:

Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ και στην προέκταση των ΕΖ, ΘΗ πάρουμε ΕΚ = ΘΛ = ΑΓ, τότε ο τεμαχισμός του τετραπλεύρου από τα ΖΕ, ΕΘ, ΘΗ μας δίνει το παραλληλόγραμμο ΕΘΛΚ, όπου ΕΘ = $\frac{1}{2}\delta_2$, ΘΛ = δ_1 και γωνία ΕΘΛ = ω. Άρα Ε = $\frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot ημω$.



- **Πόρισμα:**

Το εμβαδό ρόμβου δίνεται από τον τύπο $\mathbf{E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2}$

- **Θεώρημα:**

Το εμβαδό κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta) - \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot συν^2\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)}}$$

όπου τ είναι η ημιπερίμετρος $\mathbf{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}$ **του τετραπλεύρου.**

Απόδειξη:

Από τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ έχουμε:

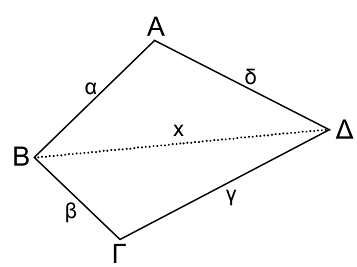
2Ε = αδημΑ + βγημΓ (1)

και από τον νόμο συνημιτόνων:

$x^2 = \alpha^2 + \delta^2 - 2\alpha\cdot\delta\cdot συνA$

$x^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\cdot\gamma\cdot συν\Gamma$ ή

$$\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2} = \alpha\cdot\delta\cdot συνA - \beta\cdot\gamma\cdot συν\Gamma \quad (2)$$



Από τις (1) και (2) παίρνουμε:

$$4E^2 + \left(\frac{\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2}{2}\right)^2 = \alpha^2{\cdot}\delta^2 + \beta^2{\cdot}\gamma^2 - 2\alpha{\cdot}\beta{\cdot}\gamma{\cdot}\delta{\cdot}\text{συν}(A+\Gamma)$$

$$= (\alpha{\cdot}\delta + \beta{\cdot}\gamma)^2 - 2\alpha{\cdot}\beta{\cdot}\gamma{\cdot}\delta[1 + \text{συν}(A+\Gamma)]$$

$$= (\alpha{\cdot}\delta + \beta{\cdot}\gamma)^2 - 4\alpha{\cdot}\beta{\cdot}\gamma{\cdot}\delta\,\text{συν}^2\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)$$

ή $16E^2 = 4(\alpha{\cdot}\delta + \beta{\cdot}\gamma)^2 - \left(\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2\right)^2 - 16{\cdot}\alpha{\cdot}\beta{\cdot}\gamma{\cdot}\delta\,\text{συν}^2\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)$

ή $16E^2 = (-\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma-\delta) - 16\alpha{\cdot}\beta{\cdot}\gamma{\cdot}\delta\,\text{συν}^2\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)$

ή $E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta) - \alpha\beta\gamma\delta\,\text{συν}^2\left(\frac{A+\Gamma}{2}\right)}$

Εάν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε $A + \Gamma = 180^{o}$, άρα:

- **Πόρισμα:**

Το εμβαδό εγγραψίμου τετραπλεύρου δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{E = \sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)(\tau-\delta)}}$$

Εάν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο τότε επειδή

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = \tau$$

θα έχουμε:

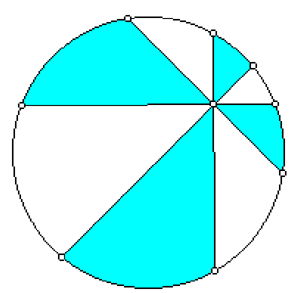
- **Πόρισμα:**

Το εμβαδό εγγράψιμου και περιγράψιμου τετραπλεύρου δίνεται από τον τύπο $E = \sqrt{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta}$

- Και κλείνουμε με ένα παράδειγμα τεμαχισμού και ανασύνθεσης σχημάτων τα οποία δεν είναι ευθύγραμμα... Είναι το περίφημο

- **ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΠΙΤΣΑΣ**

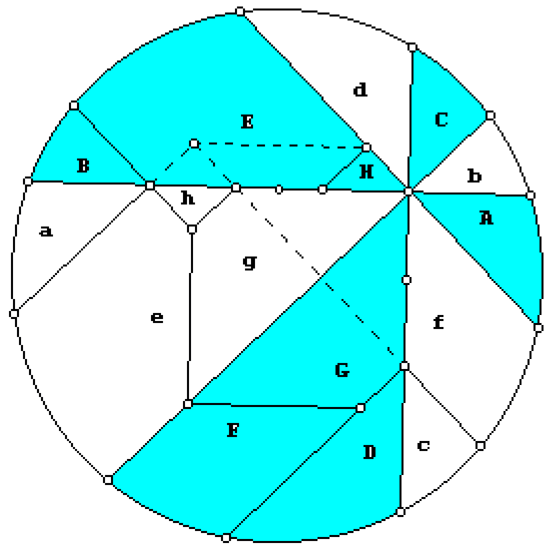
Αν μία πίτσα χωρισθεί σε οκτώ φέτες με τομές που σχηματίζουν γωνίες 45^{o} γύρω από ένα οποιοδήποτε σημείο της πίτσας τότε τα αθροίσματα των εμβαδών των εναλλασσόμενων (διαφορετικού χρώματος στο σχήμα) φετών είναι ίσα.



Απόδειξη:

Η απόδειξη δεν χρειάζεται πολλά λόγια και είναι παρμένη από το βιβλίο *Proofs without words II* του Roger B. Nelsen.

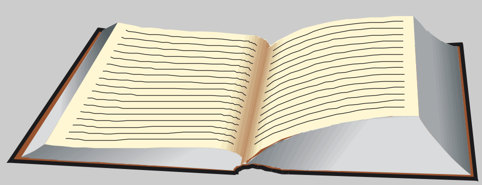
Τα σχήματα με τα μικρά γράμματα είναι ισοδύναμα των σχημάτων με τα κεφαλαία γράμματα. Τα σχήματα a, A είναι ισοδύναμα ως συμμετρικά ως προς μία διάμετρο και το ίδιο συμβαίνει με τα σχήματα c, C.



Ο υπόλοιπος τεμαχισμός είναι φανερός από το σχήμα, όπου οι διακεκομμένες γραμμές δεν ανήκουν στο πλέγμα του τεμαχισμού, αλλά υπάρχουν για την κατανόηση της κατασκευής. ■

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Σ.Ε.

Στη σελίδα 29 αυτού του τεύχους του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ δημοσιεύεται μία απόδειξη του "ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΠΙΤΣΑΣ" από τον Γιάννη Απλακίδη.



Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Εμβαδά και απλός λόγος σε τρίγωνα

Λεωνίδας Θαρραλίδης
Μαθηματικός, Καστοριά

- Είναι γνωστή η χρησιμότητα της θεωρίας των εμβαδών στην απόδειξη μετρικών σχέσεων σε τρίγωνα.

Από τους τύπους: $E=\frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha=\frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon_\beta=\frac{1}{2}\gamma\cdot\upsilon_\gamma$, $E = \tau\cdot\rho$, $E=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{4R}$, τον τύπο του Ήρωνα και τους: $E = (\tau-\alpha)\rho_\alpha = (\tau-\beta)\rho_\beta = (\tau-\gamma)\rho_\gamma$, (*που αναφέρονται και αξιοποιούνται σχετικά στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου*), απορρέουν, με σύντομο και σχεδόν μηχανιστικό τρόπο, ένα πλήθος σχέσεων μεταξύ των στοιχείων κάθε τριγώνου.

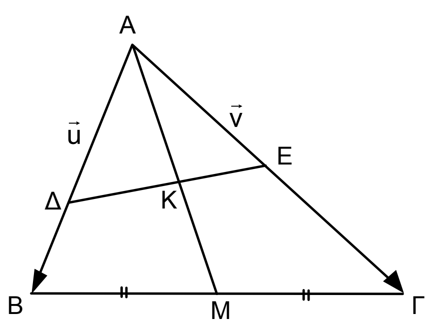
Εδώ, θα γίνει μία διερεύνηση της βοήθειας που προσφέρει ένα γνωστό θεώρημα στον υπολογισμό απλών λόγων σε τμήματα που σχηματίζονται σε τρίγωνα.
Το θεώρημα είναι το εξής:

"Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών των τριγώνων που περιέχουν αυτές τις γωνίες".

Το θεώρημα θα χρησιμοποιηθεί στα παρακάτω, χωρίς να γίνεται ειδική αναφορά.

- Ας δούμε στη γενική μορφή του ένα πρόβλημα υπολογισμού απλού λόγου σε τρίγωνο:

Στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ, Ε, τέτοια ώστε: $\frac{A\Delta}{AB}=\alpha$, $\frac{AE}{A\Gamma}=\beta$, $(0<\alpha,\ \beta\le 1)$. Αν Κ το σημείο τομής της ΔΕ με τη διάμεσο ΑΜ, να υπολογίσετε τους λόγους: $\frac{AK}{AM}$ και $\frac{K\Delta}{KE}$.



Στη διανυσματική του λύση, το θέμα αντιμετωπίζεται κλασσικά:

Θέτοντας: $\vec{AB}=\vec{u},\ \vec{A\Gamma}=\vec{v},\ \dfrac{AK}{AM}=x$ και $\vec{\Delta K}=y\cdot\vec{KE}$,

είναι προφανώς:

$$\vec{A\Delta}=\alpha\cdot\vec{u},\ \vec{AE}=\beta\cdot\vec{v},\ \vec{AK}=x\cdot\vec{AM}\Rightarrow \mathbf{\vec{AK}=\frac{x}{2}\cdot\vec{u}+\frac{x}{2}\cdot\vec{v}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Ακόμα, αφού $\vec{\Delta K}=y\cdot\vec{KE}$, έχουμε: $\vec{AK}=\dfrac{\vec{A\Delta}+y\cdot\vec{AE}}{1+y}$.

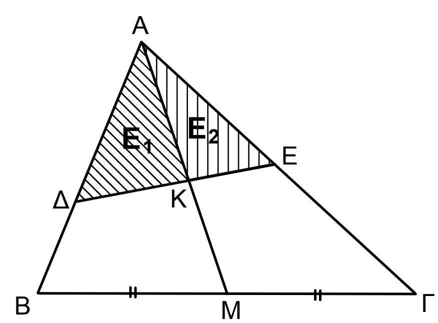
Δηλαδή: $$\mathbf{\vec{AK}=\frac{\alpha}{1+y}\cdot\vec{u}+\frac{\beta y}{1+y}\cdot\vec{v}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Από τις (1) και (2), αφού τα $\vec{u},\ \vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\alpha}{1+y}\\[2mm] \dfrac{x}{2}=\dfrac{\beta\cdot y}{1+y}\end{cases} \quad \text{απ' όπου θα πάρουμε:} \quad \begin{cases}\mathbf{x=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} & \mathbf{(3)}\\[2mm] \mathbf{y=\dfrac{\alpha}{\beta}} & \mathbf{(4)}\end{cases}$$

■ Δίνουμε, στη συνέχεια, τη λύση με τη βοήθεια του θεωρήματος των εμβαδών.
Για συντομία θα θέσουμε:
$(AB\Gamma)=E,\ (A\Delta K)=E_1,\ (AKE)=E_2$.

Είναι γνωστό ότι: $(ABM)=(AM\Gamma)=\dfrac{E}{2}$.



Έχουμε, λοιπόν: $\dfrac{(A\Delta K)}{(ABM)}=\dfrac{A\Delta}{AB}\cdot\dfrac{AK}{AM}$, δηλαδή: $\dfrac{E_1}{\frac{E}{2}}=\alpha x$,

απ' όπου: $\mathbf{E_1=\dfrac{\alpha x\cdot E}{2}}$.

Όμοια, από την $\dfrac{(AKE)}{(AM\Gamma)}=\dfrac{AK}{AM}\cdot\dfrac{AE}{A\Gamma}$, βρίσκουμε: $\mathbf{E_2=\dfrac{\beta x\cdot E}{2}}$.

Είναι και: $$\frac{(A\Delta E)}{(AB\Gamma)}=\frac{A\Delta}{AB}\cdot\frac{AE}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E_1+E_2}{E}=\alpha\beta \Leftrightarrow \frac{\frac{x\cdot E}{2}(\alpha+\beta)}{E}=\alpha\beta$$

και τελικά: $\mathbf{x = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}}$, δηλαδή καταλήξαμε στον τύπο (3).

Ακόμη: $\dfrac{(\text{ΑΔΚ})}{(\text{ΑΔΕ})} = \dfrac{\text{ΚΔ}}{\text{ΔΕ}}$, οπότε : $\dfrac{\text{ΚΔ}}{\text{ΔΕ}} = \dfrac{E_1}{E_1+E_2} = \dfrac{\frac{\alpha\cdot x\cdot E}{2}}{\alpha\cdot\beta\cdot E} = \dfrac{x}{2\beta} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$,

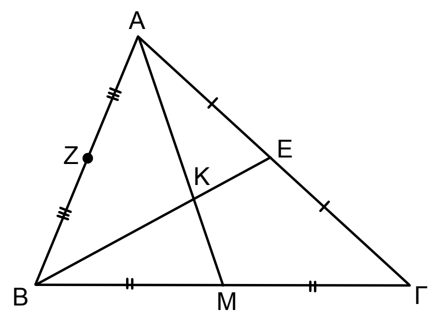
Τελικά: $\dfrac{\text{ΚΔ}}{\text{ΔΕ}} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ και $\dfrac{\text{ΚΔ}}{\text{ΔΕ}-\text{ΚΔ}} = \dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)-\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\dfrac{ΚΔ}{ΚΕ} = \dfrac{\alpha}{\beta}}$, που συμφωνεί με τον τύπο (4) ●

- Ο τύπος (3) έχει ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην απόδειξη γνωστών προτάσεων:

Εφαρμογή 1

Δείξτε ότι οι διάμεσοι τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη:



Εδώ το σημείο Δ συμπίπτει με το Β, οπότε είναι α = 1.

Ακόμη είναι $\dfrac{\text{ΑΕ}}{\text{ΑΓ}} = \dfrac{1}{2}$, δηλαδή β = $\dfrac{1}{2}$.

Ο τύπος (3) δίνει: x = $\dfrac{2}{3}$, ενώ ο (4): y = 2.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι: οι διάμεσοι ΑΜ, ΒΕ τυχαίου τριγώνου τέμνονται σε σημείο Κ με:

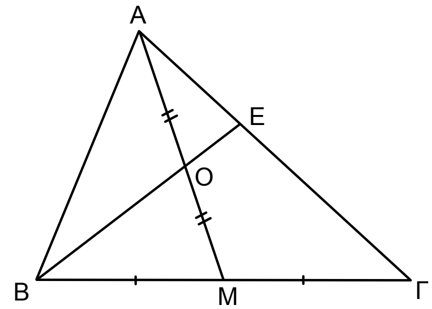
$$\mathbf{ΑΚ = \frac{2}{3}ΑΜ} \text{ και ΒΚ} = 2\cdot\text{ΚΕ} \Leftrightarrow \mathbf{ΒΚ = \frac{2}{3}ΒΕ}.$$

Όμοια, αν ΓΖ η τρίτη διάμεσος και Κ΄ το σημείο τομής των ΑΜ, ΓΖ, θα είναι, (αφού τώρα: α΄ = $\dfrac{1}{2}$, β΄ = 1): $x' = \dfrac{2}{3}$ δηλαδή $\text{ΑΚ}' = \dfrac{2}{3}\text{ΑΜ}$, συνεπώς τα Κ΄, Κ ταυτίζονται.

Εφαρμογή 2

Έστω Ο το μέσο της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Η ΒΟ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Δείξτε ότι: ΓΕ = 2·ΑΕ.

Απόδειξη:



Τώρα είναι $\frac{Α\Delta}{ΑΒ}=α=1$ (*τα Δ, Β συμπίπτουν*) και $\frac{ΑΟ}{ΑΜ}=x=\frac{1}{2}$.

Από τον τύπο (3) (*όπου άγνωστος είναι το β =* $\frac{ΑΕ}{Α\Gamma}$), παίρνουμε:

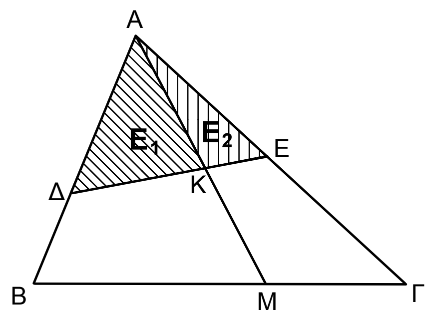
$$\frac{1}{2}=\frac{2β}{1+β} \text{ άρα } β=\frac{1}{3}.$$

Έτσι: $\frac{ΑΕ}{Α\Gamma}=\frac{1}{3}$ οπότε : $ΑΕ=\frac{1}{3}Α\Gamma$, $\Gamma Ε=\frac{2}{3}Α\Gamma$ και επομένως ΓΕ = 2ΑΕ.

- Ας προχωρήσουμε τώρα σε μία γενικότερη περίπτωση, όπου το Μ δεν είναι μέσο της ΒΓ, αλλά είναι γνωστός ο λόγος $\frac{ΒΜ}{Β\Gamma}=γ$.

  Εξακολουθούν να είναι δεδομένοι οι λόγοι $\frac{Α\Delta}{ΑΒ}=α$, $\frac{ΑΕ}{Α\Gamma}=β$

  και το ζητούμενο είναι ο λόγος x = $\frac{ΑΚ}{ΑΜ}$.



Από το γνωστό θεώρημα των εμβαδών, παίρνουμε: $\frac{(ΑΒΜ)}{(ΑΒ\Gamma)}=\frac{ΒΜ}{Β\Gamma}=γ$,

οπότε: (ΑΒΜ) = γ·Ε. Έτσι: (ΑΓΜ) = (ΑΒΓ) – (ΑΒΜ) = (1 – γ)·Ε.

Έχουμε τώρα: $\frac{(Α\Delta Κ)}{(ΑΒΜ)}=\frac{Α\Delta}{ΑΒ}\cdot\frac{ΑΚ}{ΑΜ} \Leftrightarrow \frac{Ε_1}{γ\cdot Ε}=α\cdot x$ οπότε: $\mathbf{Ε_1 = αγx\cdot Ε}$

Όμοια βρίσκουμε: $\mathbf{Ε_2 = β(1 – γ)x\cdot Ε}$

και επειδή: $\frac{(Α\Delta Ε)}{(ΑΒ\Gamma)}=\frac{Α\Delta}{ΑΒ}\cdot\frac{ΑΕ}{Α\Gamma} \Leftrightarrow \frac{Ε_1+Ε_2}{Ε}=α\cdot β$,

παίρνουμε: α·γ·x + β(1 – γ)x = α·β, απ' όπου είναι: $\mathbf{x=\frac{α\cdot β}{α\cdot γ+β(1-γ)}}$ **(5)**

Παρατήρηση:

Στον τύπο (5) είναι **0 < γ < 1**. Δεν μπορούμε να επιτρέψουμε γ = 1, αφού τότε

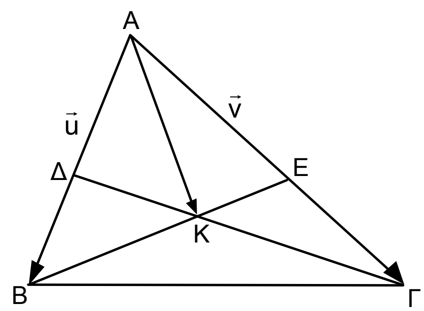
(ΑΓΜ) = 0 και η σχέση $\frac{(AKE)}{(AM\Gamma)} = \frac{AK}{AM} \cdot \frac{AE}{A\Gamma}$ δεν έχει νόημα.

Ο τύπος (5) για γ = $\frac{1}{2}$ (δηλαδή όταν το Μ είναι μέσο του ΒΓ), ξαναδίνει, φυσικά, τον τύπο (3).

- Μετά τα όσα προηγήθηκαν, είμαστε έτοιμοι να αντιμετωπίσουμε το γενικό (και δυσκολότερο) πρόβλημα:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε επί των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\frac{A\Delta}{AB} = \alpha$, $\frac{AE}{A\Gamma} = \beta$. Οι ΒΕ, ΓΔ τέμνονται στο Κ. Να υπολογίσετε τους λόγους: $\frac{BK}{BE}$, $\frac{\Gamma K}{\Gamma\Delta}$.

Απόδειξη (διανυσματική):



Θέτοντας: $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{A\Gamma} = \vec{v}$,

είναι: $\vec{A\Delta} = \alpha \cdot \vec{u}$, $\vec{AE} = \beta \cdot \vec{v}$.

Έστω: $\vec{BK} = \lambda \cdot \vec{KE}$, $\vec{\Gamma K} = \mu \cdot \vec{K\Delta}$

Τότε: $\begin{cases} \vec{AK} = \dfrac{\vec{AB} + \lambda \cdot \vec{AE}}{1+\lambda} \\ \vec{AK} = \dfrac{\vec{A\Gamma} + \mu \cdot \vec{A\Delta}}{1+\mu} \end{cases}$, οπότε: $\frac{\vec{u} + \lambda\beta \cdot \vec{v}}{1+\lambda} = \frac{\vec{v} + \mu\alpha \cdot \vec{u}}{1+\mu}$,

και επειδή τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά: $\begin{cases} \dfrac{1}{1+\lambda} = \dfrac{\mu\alpha}{1+\mu} \\ \dfrac{\lambda\beta}{1+\lambda} = \dfrac{1}{1+\mu} \end{cases}$

Διαιρώντας τις τελευταίες, προκύπτει μ = $\frac{1}{\alpha\lambda\beta}$ και επιστρέφοντας στη δεύτερη, παίρνουμε τελικά: $\lambda = \frac{1-\alpha}{\alpha(1-\beta)}$.

Έτσι, $\overrightarrow{BK} = \lambda \cdot \overrightarrow{KE} \iff \overrightarrow{BK} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha(1-\beta)} \cdot \overrightarrow{KE}$,

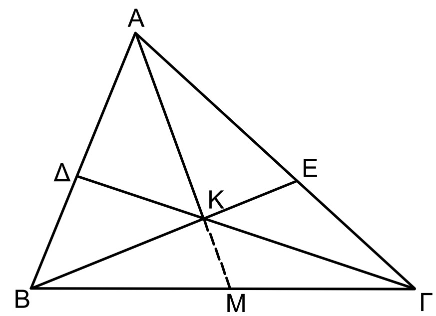
οπότε: $\dfrac{BK}{KE} = \dfrac{1-\alpha}{\alpha-\alpha\beta} \iff \dfrac{BK}{BK+KE} = \dfrac{1-\alpha}{(1-\alpha)+(\alpha-\alpha\beta)}$.

Έχουμε λοιπόν: $\mathbf{\dfrac{BK}{BE} = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}}$ **(6)**

Εντελώς ανάλογα, αφού $\mu = \dfrac{1}{\alpha\lambda\beta} = \ldots = \dfrac{1-\beta}{\beta(1-\alpha)}$,

από την $\overrightarrow{\Gamma K} = \dfrac{1-\beta}{\beta(1-\alpha)} \cdot \overrightarrow{K\Delta}$, βρίσκουμε : $\mathbf{\dfrac{\Gamma K}{\Gamma\Delta} = \dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}}$ **(7)**

Απόδειξη (με εμβαδά):

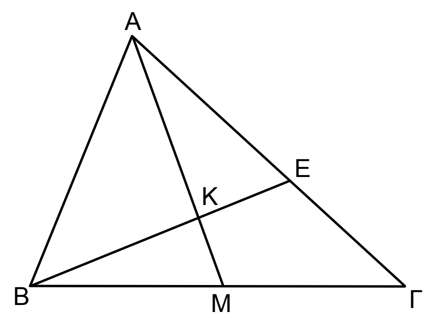


Έστω Μ το σημείο τομής των ΑΚ, ΒΓ και $\dfrac{AK}{AM} = x$, $\dfrac{BM}{B\Gamma} = \gamma$ (x, γ *άγνωστοι*).

Αν (ΑΒΓ) = Ε, είναι: $\dfrac{(A\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{A\Delta}{AB}$,

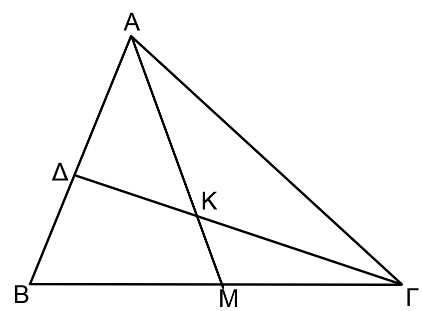
δηλαδή: **(ΑΔΓ) = α·Ε**,
και όμοια: **(ΑΒΕ) = β·Ε**.

Εφαρμόζουμε στα δύο επόμενα σχήματα τον τύπο (5).



Για το πρώτο θα είναι:

$$x = \frac{\beta}{\gamma + \beta(1-\gamma)} \quad \left(\text{αφού } \alpha' = \frac{A\Delta'}{AB} = 1\right).$$



Στο δεύτερο σχήμα, θα έχουμε:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha\gamma + 1 - \gamma} \quad \left(\text{αφού } \beta' = \frac{AE'}{A\Gamma} = 1\right)$$

Εξισώνοντας τις δύο διαφορετικές εκφράσεις του x (*θυμίζουμε εδώ ότι ο x είναι άγνωστος*), παίρνουμε διαδοχικά:

$$\frac{\beta}{\gamma+\beta(1-\gamma)}=\frac{\alpha}{\alpha\gamma+1-\gamma} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\beta\gamma+\beta-\beta\gamma=\alpha\gamma+\alpha\beta-\alpha\beta\gamma \quad\Leftrightarrow$$

$$2\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma=\alpha\beta-\beta \quad\Leftrightarrow\quad \gamma(\alpha+\beta-2\alpha\beta)=\beta(1-\alpha)$$

Τελικά: $\boldsymbol{\gamma=\dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}}$ **(8)**

Από 'κει και πέρα τα πράγματα απλουστεύουν:

Είναι: $x=\dfrac{\alpha}{\alpha\gamma+1-\gamma}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}+1-\dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}}=$

$$=\frac{\alpha(\alpha+\beta-2\alpha\beta)}{\cancel{\alpha\beta}-\alpha^2\beta+\alpha+\cancel{\beta}-\cancel{2\alpha\beta}-\cancel{\beta}+\cancel{\alpha\beta}}=\frac{\alpha(\alpha+\beta-2\alpha\beta)}{\alpha(1-\alpha\beta)}$$

και τελικά: $\boldsymbol{x=\dfrac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}$ **(9)**

Τώρα, θέτοντας $y=\dfrac{BK}{BE}$, είναι $y=\dfrac{BK}{BE}=\dfrac{(ABK)}{(ABE)}$.

Όμως, $\dfrac{(ABK)}{(ABM)}=\dfrac{AK}{AM}=x$ (γνωστό), $\dfrac{(ABM)}{(AB\Gamma)}=\dfrac{BM}{B\Gamma}=\gamma$ (γνωστό).

Με πολλαπλασιασμό των δύο τελευταίων σχέσεων, έχουμε:

$\dfrac{(ABK)}{(AB\Gamma)}=x\gamma$ δηλαδή: **(ΑΒΚ) = xγ·Ε**.

Ακόμα, (ΑΒΕ) = β·Ε, οπότε $y=\dfrac{(ABK)}{(ABE)}=\dfrac{x\gamma\cdot E}{\beta\cdot E}=\dfrac{x\gamma}{\beta}$ και με αντικατάσταση

των x, γ: $y=\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta}\cdot\dfrac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}}{\beta}=\dfrac{\beta(1-\alpha)}{\beta(1-\alpha\beta)}$. Έτσι: $\boldsymbol{y=\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}}$,

δηλαδή $\boldsymbol{\dfrac{BK}{BE}=\dfrac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}}$. Με εναλλαγή των α, β έχουμε: $\boldsymbol{z=\dfrac{\Gamma K}{\Gamma\Delta}=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha\beta}}$ ●

- Δίνουμε στη συνέχεια τρεις εφαρμογές των παραπάνω τύπων:

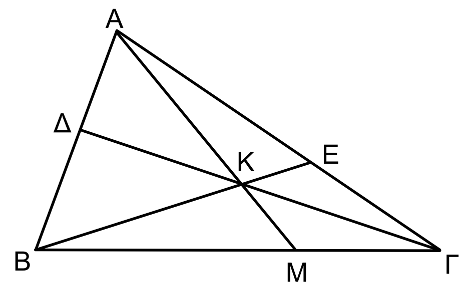
Εφαρμογή 3

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Μ, Ε των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Αν τα τμήματα ΓΔ, ΑΜ, ΒΕ συντρέχουν, τότε να δειχτεί ότι:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{MB}{M\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}=1$$

Θεώρημα Ceva

Απόδειξη:



Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο συμβολισμό $\frac{A\Delta}{AB}=\alpha$, $\frac{BM}{B\Gamma}=\gamma$, $\frac{AE}{A\Gamma}=\beta$, με ιδιότητες αναλογιών, βρίσκουμε: $\frac{\Delta A}{\Delta B}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$, $\frac{MB}{M\Gamma}=\frac{\gamma}{1-\gamma}$, $\frac{E\Gamma}{EA}=\frac{1-\beta}{\beta}$.

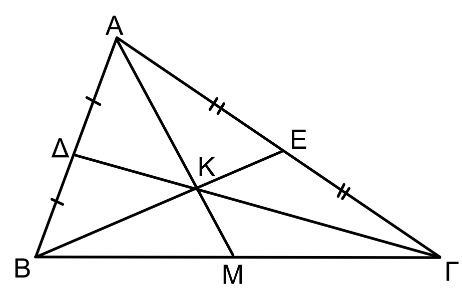
Έτσι (και αφού $\gamma=\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}$), παίρνουμε:

$$\frac{\Delta A}{\Delta B}\cdot\frac{MB}{M\Gamma}\cdot\frac{E\Gamma}{EA}=\frac{\alpha\cdot\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}\cdot(1-\beta)}{(1-\alpha)\cdot\left[1-\frac{\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}\right]\cdot\beta}=\frac{\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}}{\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta-\beta(1-\alpha)}{\alpha+\beta-2\alpha\beta}}=\frac{\alpha(1-\beta)}{\alpha-\alpha\beta}=1$$

Εφαρμογή 4

Το Θεώρημα του Κέντρου Βάρους τριγώνου.

Απόδειξη:



Θέτοντας στην (8):

$\alpha=\frac{A\Delta}{AB}=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{AE}{A\Gamma}=\frac{1}{2}$

προκύπτει: $\gamma=\frac{BM}{B\Gamma}=...=\frac{1}{2}$,

δηλαδή το Μ είναι μέσο της ΒΓ.

Έτσι, οι διάμεσοι του ΑΒΓ συντρέχουν στο Κ.

Ακόμη, η (9) για α = β = $\frac{1}{2}$, δίνει x = ... = $\frac{2}{3}$ και οι (6), (7):

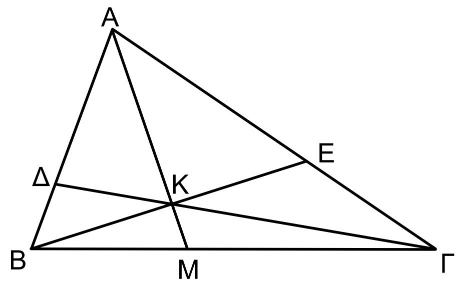
$\frac{BK}{BE} = \frac{2}{3} = \frac{\Gamma K}{\Gamma\Delta}$, δηλαδή βρίσκουμε τη γνωστή ιδιότητα του Βαρύκεντρου.

Εφαρμογή 5

Έστω Κ εσωτερικό σημείο τριγώνου ΑΒΓ. Οι ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ στα Μ, Ε, Δ αντίστοιχα.

Αποδείξτε ότι: $\frac{AK}{AM} + \frac{BK}{BE} + \frac{\Gamma K}{\Gamma\Delta} = 2$

Απόδειξη:



Από τους τύπους (6), (7), (9) είναι:

$$\frac{AK}{AM} + \frac{BK}{BE} + \frac{\Gamma K}{\Gamma\Delta} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} + \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} + \frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta} =$$

$$= \frac{2-\alpha-\beta+\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta} = \frac{2(1-\alpha\beta)}{1-\alpha\beta} = 2$$

Σχόλιο συντάκτη Ν. Ιωσηφίδη:

Με τη βοήθεια του τύπου (9) αποδεικνύεται και το Θεώρημα του **Van Aubel**, δηλαδή: αν οι ΑΜ, ΒΕ, ΓΔ συντρέχουν στο Κ (βλέπε παραπάνω σχήμα), τότε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} + \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{AK}{KM}.$$

Πράγματι: $\frac{A\Delta}{\Delta B} + \frac{AE}{E\Gamma} = \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}$

και $\frac{AK}{KM} = \frac{x}{1-x} = \frac{\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta}}{1-\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha\beta}} = \frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}$

Κέντρα Συμμετρίας Καμπύλης

Γιώργος Ιωσηφίδης
Μαθηματικός, Βέροια

Ορισμός:

> **Ένα σημείο Κ λέγεται κέντρο συμμετρίας (Κ.Σ.) ενός σχήματος Σ, αν το συμμετρικό τού Σ ως προς το Κ συμπίπτει με το Σ.**

Είναι γνωστό ότι μια περιττή συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0, 0).

Αυτό δεν αποκλείει να υπάρχουν και άλλα κέντρα συμμετρίας. Π.χ.

- Η $f(x) = 2x$ εκτός του σημείου (0, 0) έχει ως Κ.Σ. κάθε σημείο της.
- Η $f(x) =$ ημx έχει επίσης άπειρα Κ.Σ., όπως θα δείξουμε παρακάτω.

Εδώ θα βρούμε τα Κ.Σ. των γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

Έστω f: $A \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση και $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ ένα Κ.Σ. της C_f.

Το συμμετρικό ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της C_f ως προς το Κ είναι το σημείο $M'(\lambda - x_0, \mu - y_0)$.

Για να είναι $M' \in C_f$, πρέπει και αρκεί:

i) $\lambda - x_0 \in A$ και
ii) $f(\lambda - x_0) = \mu - y_0$ ή το ίδιο: $f(x_0) + f(\lambda - x_0) = \mu$

Έχουμε λοιπόν την εξής:

Πρόταση 1

> **Έστω συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$. Για να είναι το σημείο $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ Κ.Σ. της C_f, πρέπει και αρκεί :**
>
> **i) $\lambda - x \in A$, για κάθε $x \in A$ και ii) $f(x) + f(\lambda - x) = \mu$, για κάθε $x \in A$**

Έστω τώρα ότι η f έχει τις παραπάνω ιδιότητες και είναι παραγωγίσιμη στο Α. Παραγωγίζοντας τη σχέση: $f(x) + f(\lambda - x) = \mu$ ως προς x, βρίσκουμε:

$$f'(x) - f'(\lambda - x) = 0$$

Έχουμε λοιπόν την εξής:

Πρόταση 2

Αν η συνάρτηση f: A→$\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και η C_f έχει Κ.Σ. το σημείο $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$, τότε:

$$f'(x) = f'(\lambda - x), \text{ για κάθε } x \in A$$

Αντίστροφα:

Αν η συνάρτηση f: A→$\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$f'(x) = f'(\lambda - x), \text{ για κάθε } x \in A,$$

τότε η C_f έχει Κ.Σ. το σημείο $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$, όπου μ η σταθερή τιμή της συνάρτησης $g(x) = f(x) + f(\lambda - x)$.

Άμεση συνέπεια της παραπάνω πρότασης είναι η:

Πρόταση 3

Αν η συνάρτηση f: A→$\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και η f' είναι 1-1, τότε η C_f δεν έχει Κ.Σ.

Άμεσα συμπεράσματα είναι οι ακόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 4

Αν η συνάρτηση f: A→$\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και η f' είναι γνήσια μονότονη στο A, τότε η C_f δεν έχει Κ.Σ.

Πρόταση 5

Αν η συνάρτηση f: A→$\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο A και επιπλέον $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in A$ ή $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in A$, τότε η C_f δεν έχει Κ.Σ.
Επομένως, οι συναρτήσεις που είναι κυρτές ή κοίλες σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού τους, δεν έχουν Κ.Σ.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τις παραπάνω προτάσεις για να βρούμε τα Κ.Σ. διαφόρων καμπυλών ή να αποδείξουμε ότι δεν έχουν Κ.Σ.

Παραδείγματα:

Να βρεθούν τα Κ.Σ. των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

1. $f(x) = αx + β,\ α \neq 0$

Λύση:

Πεδίο ορισμού: Α = $\mathbb{R}$.

Έστω ότι το σημείο $K\left(\frac{λ}{2}, \frac{μ}{2}\right)$ είναι το Κ.Σ. της C_f.

Θα ισχύει τότε: $f(x) + f(λ - x) = μ$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$αx + β + α(λ - x) + β = μ \quad \Leftrightarrow \quad αλ + 2β = μ$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η τελευταία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αρκεί να επιλέξουμε: $μ = αλ + 2β$.

Το σημείο λοιπόν $\left(\frac{λ}{2}, \frac{μ}{2}\right) = \left(\frac{λ}{2}, \frac{αλ}{2} + β\right)$, που είναι το οποιοδήποτε σημείο της C_f είναι και το Κ.Σ. της.

2. $f(x) = αx^2 + βx + γ,\ α \neq 0$

Λύση:

Έχει Πεδίο Ορισμού: Α = $\mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει Κ.Σ. $K\left(\frac{λ}{2}, \frac{μ}{2}\right)$.

Θα πρέπει: $f(x) + f(λ - x) = μ$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$

$αx^2 + βx + γ = α(λ - x)^2 + β(λ - x) + γ = μ$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow$

$2αx^2 - 2αλx + αλ^2 + βλ + 2γ - μ = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η τελευταία όμως δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $α \neq 0$.

Έτσι η C_f δεν έχει Κ.Σ.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται η:

Πρόταση 6

> **Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική άρτιου βαθμού, τότε η C_f δεν έχει Κ.Σ.**

Πράγματι, αν $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$, με $\alpha_\nu \neq 0$ και ν = άρτιος, τότε αν το $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ είναι το Κ.Σ. της C_f, θα ισχύει:

$f(x) + f(\lambda - x) = \mu$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 + \alpha_\nu(x-\lambda)^\nu + ... + \alpha_1(x-\lambda) + \alpha_0 - \mu = 0$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επειδή ο ν είναι άρτιος, ο συντελεστής του x^ν στο ανάπτυγμα $(\lambda - x)^\nu = (x - \lambda)^\nu$ είναι το +1, έτσι στην (1) ο συντελεστής του x^ν στο πολυώνυμο του 1ου μέλους είναι ο $2\alpha_\nu \neq 0$ και η (1) δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η C_f δεν έχει Κ.Σ.

3. $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}}$

Λύση:

Εδώ το Π.Ο. είναι $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

Αν $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right)$ είναι ένα Κ.Σ. της C_f, θα πρέπει:

$$\lambda - x \in A \text{ άρα } \lambda - x \neq 1 \;\Leftrightarrow\; x \neq \lambda - 1.$$

Θα πρέπει λοιπόν $\lambda - 1 = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 2}$.

Ώστε το μόνο πιθανό Κ.Σ. της C_f είναι το $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = \left(1, \frac{\mu}{2}\right)$.

Πρέπει τώρα να ισχύει: $f(x) + f(\lambda - x) = \mu$, για κάθε $x \in A$.

Είναι: $f(x) + f(2 - x) = \dfrac{2x+3}{x-1} + \dfrac{2(2-x)+3}{2-x-1} = \dfrac{2x+3}{x-1} + \dfrac{7-2x}{1-x} =$

$$= \frac{2x+3+2x-7}{x-1} = \frac{4x-4}{x-1} = 4 = \mu,$$

άρα το σημείο $K\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\mu}{2}\right) = (1, 2)$ είναι Κ.Σ. της C_f.

4. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-4)}$

Λύση:

Το Π.Ο. της f είναι $A = \mathbb{R} - \{1, 2, 4\}$.

Αν $K\left(\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\mu}{2}\right)$ είναι ένα Κ.Σ. της C_f, θα πρέπει: $\lambda - x \in A$ για κάθε $x \in A$.

άρα: $\left.\begin{array}{l} \lambda - x \neq 1 \\ \lambda - x \neq 2 \\ \lambda - x \neq 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x \neq \lambda - 1 \\ x \neq \lambda - 2 \\ x \neq \lambda - 4 \end{array}\right\}$

Επειδή $\lambda - 4 < \lambda - 2 < \lambda - 1$, θα πρέπει: $\left.\begin{array}{l} \lambda - 4 = 1 \\ \lambda - 2 = 2 \\ \lambda - 1 = 4 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda = 5 \\ \lambda = 4 \\ \lambda = 5 \end{array}\right\}$

Δηλαδή οι σχέσεις δεν συναληθεύουν και επομένως η C_f δεν έχει Κ.Σ.

5. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 2}$

Λύση:

Είναι $x^2 - 2x + 2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $A = \mathbb{R}$.

Έστω $K\left(\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\mu}{2}\right)$ είναι ένα Κ.Σ. της C_f.

Πρέπει: $f(x) + f(\lambda - x) = \mu$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} + \frac{2(\lambda - x)^2 - 2(\lambda - x) + 2}{(\lambda - x)^2 - 2(\lambda - x) + 2} = \mu, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Με απαλοιφή των παρανομαστών προκύπτει ισότητα δύο πολυωνύμων 4ου βαθμού. Εξισώνοντας τους συντελεστές των ιδίων δυνάμεων του x, βρίσκουμε τα λ, μ.

Μπορούμε να αποφύγουμε τις πολλές πράξεις ως εξής:

Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα:

- για x = 0: $1+\dfrac{2\lambda^2-2\lambda+2}{\lambda^2-2\lambda+2}=\mu$ (2)

- για x = 1: $2+\dfrac{2(\lambda-1)^2-2(\lambda-1)+2}{(\lambda-1)^2-2(\lambda-1)+2}=\mu$ (3)

Λύνουμε το σύστημα των (2) και (3):

$$1+\frac{2\lambda^2-2\lambda+2}{\lambda^2-2\lambda+2}=2+\frac{2(\lambda-1)^2-2(\lambda-1)+2}{(\lambda-1)^2-2(\lambda-1)+2}$$

Μετά από πράξεις, καταλήγουμε:

$$\lambda^4-6\lambda^3+17\lambda^2-24\lambda+12=0 \quad (4)$$

Μία ρίζα της (4) είναι η **$\lambda = 1$**.

Με το σχήμα Horner βρίσκουμε:

$$\lambda^4-6\lambda^3+17\lambda^2-24\lambda+12=(\lambda-1)(\lambda^3-5\lambda^2+12\lambda-12)$$

Το πολυώνυμο $\lambda^3-5\lambda^2+12\lambda-12$ έχει ρίζα το **$\lambda = 2$**.

Άρα: $\lambda^3-5\lambda^2+12\lambda-12=(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+6)$

Επομένως, η (4) γίνεται:

$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+6)=0$ απ' όπου $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$.

- Για **$\lambda = 1$** η (2) δίνει **$\mu = 3$**
- Για **$\lambda = 2$** η (2) δίνει **$\mu = 4$**

Έτσι πιθανά Κ.Σ. της C_f είναι τα $K_1\left(\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\mu}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ και $K_2\left(\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{\mu}{2}\right)=(1,2)$.

Βέβαια, οι λύσεις αυτές προέκυψαν από τις συγκεκριμένες τιμές:

$$x = 0 \text{ και } x = 1$$

και δεν είναι σίγουρο ότι θα είναι οι ίδιες για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται επαλήθευση.

- Για $\lambda = 1$, $\mu = 3$, η (1) γίνεται: $\dfrac{2x^2-2x+2}{x^2-2x+2}+\dfrac{2(1-x)^2-2(1-x)+2}{(1-x)^2-2(1-x)+2}=3$,

που πρέπει να επαληθεύεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως, για x = 2: $3+\dfrac{6}{5}=3$, που είναι άτοπο, άρα το πιθανό Κ.Σ. $K_1\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ απορρίπτεται.

- Για λ = 2, μ = 4 η (1) γίνεται:

$$\frac{2x^2-2x+2}{x^2-2x+2}+\frac{2(2-x)^2-2(2-x)+2}{(2-x)^2-2(2-x)+2}=4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2-2x+2}{x^2-2x+2}+\frac{2x^2-6x+6}{x^2-2x+2}=4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x^2-8x+8}{x^2-2x+2}=4,$$

που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έτσι, το σημείο $K_2\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\mu}{2}\right)=(1,2)$ είναι Κ.Σ. της C_f.

■ **Τα επόμενα παραδείγματα λύνονται με τη βοήθεια των παραγώγων, δηλαδή με τη βοήθεια των προτάσεων: 2, 3, 4 και 5.**

6. $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$

Λύση:

Είναι $A=\mathbb{R}$.

$f'(x)=2\alpha x+\beta$.

Αν $K\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\mu}{2}\right)$ είναι ένα Κ.Σ. της C_f, θα πρέπει:

$f'(x)=f'(\lambda-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $2\alpha x+\beta=2\alpha(\lambda-x)+\beta$ $\Leftrightarrow$ $4\alpha x-2\alpha\lambda=0$.

Για να ισχύει η τελευταία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει $\alpha=0$, άτοπο.

Άρα η C_f δεν έχει Κ.Σ.

7. $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta,\ \alpha\neq 0$

Λύση:

Είναι $A=\mathbb{R}$.

$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$.

Αν $K\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\mu}{2}\right)$ είναι ένα Κ.Σ. της C_f, θα πρέπει:

$f'(x) - f'(\lambda - x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

$3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma - 3\alpha(\lambda - x)^2 - 2\beta(\lambda - x) - \gamma = 0$ $\Leftrightarrow$

$(6\alpha\lambda + 4\beta)x - 3\alpha\lambda^2 - 2\beta\lambda = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 6\alpha\lambda + 4\beta = 0 & (1) \\ -3\alpha\lambda^2 - 2\beta\lambda = 0 & (2) \end{cases}$

Η (1) $\Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{2\beta}{3\alpha}$, που επαληθεύει και τη (2).

Για $\lambda = -\dfrac{2\beta}{3\alpha}$ είναι:

$$\mu = f(x) + f(\lambda - x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta + \alpha(\lambda - x)^3 + \beta(\lambda - x)^2 + \gamma(\lambda - x) + \delta =$$
$$= 2\delta - \frac{2\beta\gamma}{3\alpha} + \frac{4\beta^3}{27\alpha^2}.$$

Άρα το σημείο $K\left(\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\mu}{2}\right) = \left(-\dfrac{\beta}{3\alpha}, \delta - \dfrac{\beta\gamma}{3\alpha} + \dfrac{2\beta^3}{27\alpha^2}\right)$ είναι το μοναδικό Κ.Σ. της C_f.

8. $f(x) = $ ημx

Λύση:

Είναι $A = \mathbb{R}$, $f'(x) = $ συνx.

Αν $K\left(\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\mu}{2}\right)$ είναι Κ.Σ. της C_f, θα πρέπει:

$f'(x) - f'(\lambda - x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

συνx – συν(λ – x) = 0, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

συνx = συν(λ – x) $\Leftrightarrow$ $\left\langle \begin{array}{ll} x = 2\kappa\pi + \lambda - x & (1) \\ \quad \text{ή} & \\ x = 2\kappa\pi - \lambda + x & (2) \end{array} \right.$

Η (1) αληθεύει μόνον όταν $x = \kappa\pi + \dfrac{\lambda}{2}$, ενώ η (2) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αρκεί: $\lambda = 2\kappa\pi$.

Για $\lambda = 2\kappa\pi$ είναι:

$\mu = f(x) + f(2\kappa\pi - x) = $ ημx – ημx = 0.

Έτσι, η C_f έχει άπειρα Κ.Σ. της μορφής: $(\kappa\pi, 0)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

9. $f(x) = e^x$

Λύση:

A = $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$. Αν $K\left(\dfrac{\lambda}{2}, \dfrac{\mu}{2}\right)$ είναι ένα Κ.Σ. της C_f, θα πρέπει:

$f'(x) = f'(\lambda - x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $e^x = e^{\lambda - x}$ $\Leftrightarrow$ $x = \lambda - x$

Η τελευταία όμως ισχύει μόνο για $x = \dfrac{\lambda}{2}$, άρα η C_f δεν έχει Κ.Σ.

10. $f(x) = e^{x^2}$

Λύση:

A = $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2 + 4x^2)e^{x^2} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

άρα η C_f δεν έχει Κ.Σ.

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση
του
Παραρτήματος
Ν. Ημαθίας
της
Ελληνικής
Μαθηματικής
Εταιρείας

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΕΝΟΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Νίκος Κυριαζής

Σχόλιο συντάκτη Ν. Ιωσηφίδη:

Κατά την μελέτη δύο αποδείξεων που μας απέστειλε ο κ. Νίκος Κυριαζής για την άσκηση του ισοπλεύρου τριγώνου και ερευνώντας το θέμα βαθύτερα με τη βοήθεια Η/Υ, διαπίστωσα ότι: **Σε κάθε τρίγωνο, το σημείο Steiner[1], το σημείο Μεγ. Ναπολέοντα[2] και το περίκεντρο είναι συνευθειακά**.

Σε τηλεφωνική επικοινωνία που είχα με τον κ. Νίκο Κυριαζή και κ. Νίκο Δεργιαδέ, με διαβεβαίωσαν ότι υπάρχει η πρόταση αυτή και δεν είναι νέα. Ο κ. Κυριαζής παίρνοντας "πατριωτικά" την υπόθεση, μας απέστειλε μια γεωμετρική απόδειξη. Η παρατήρησή του ότι ίσως η απόδειξη αυτή να είναι η πρώτη γεωμετρική απόδειξη της πρότασης, ώθησε τη Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ να συμπεριλάβει την εργασία του αυτή στο 2ο τεύχος.

Ας ευχηθούμε να είναι ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ο πρώτος που δημοσιεύει την πρόταση που ακολουθεί. Από όλους τους δυνατούς γεωμέτρες, ζητάμε να μας στείλετε λύσεις ή παρατηρήσεις πάνω στην πρόταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Τα σημεία Fermat ή Steiner, Μεγ. Ναπολέοντος και περίκεντρο, κάθε τριγώνου, είναι συνευθειακά.

Απόδειξη:

Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ (σχήμα 1), τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ΄, Α΄ΒΓ, ΑΒ΄Γ (εκτός του τριγώνου ΑΒΓ) και $Γ_1$, $Α_1$, $Β_1$ τα κέντρα τους αντίστοιχα.
Αν Φ είναι το σημείο Fermat ή Steiner, Ν το σημείο του Μεγ. Ναπολέοντος και Ο το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, θα δείξουμε ότι η ΦΝ περνά από το Ο, ή ότι η ΦΝΟ είναι ευθεία,

$$(Φ \equiv ΑΑ'\cap ΒΒ'\cap ΓΓ',\ Ν \equiv ΑΑ_1\cap ΒΒ_1\cap ΓΓ_1,\ Ο \equiv Α'Α_1\cap Β'Β_1\cap Γ'Γ_1).$$

---

1 **Σημείο Steiner ή Fermat:** Εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα Α΄ΒΓ, Β΄ΓΑ, Γ΄ΑΒ. Οι ευθείες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται από το ίδιο σημείο Φ, γνωστό ως ***σημείο Steiner ή Fermat***.

2 **Σημείο Μεγ. Ναπολέοντα:** Αν $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ είναι τα κέντρα των παραπάνω ισοπλεύρων τριγώνων, οι ευθείες $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$ διέρχονται από το ίδιο σημείο Ν, γνωστό ως ***σημείο Μεγ. Ναπολέοντα***.

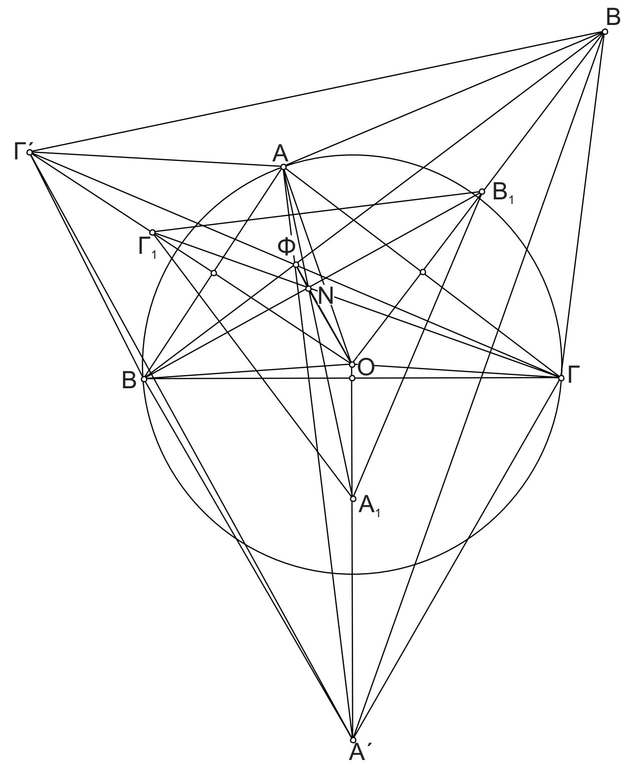
Παρατηρούμε ότι τα τρία παραπάνω σημεία είναι δυνατό να ληφθούν σαν τομές των ομόλογων πλευρών των τριγώνων ΒΒ΄Β$_1$, ΓΓ΄Γ$_1$, δηλαδή:

Φ ≡ ΒΒ΄∩ΓΓ΄,

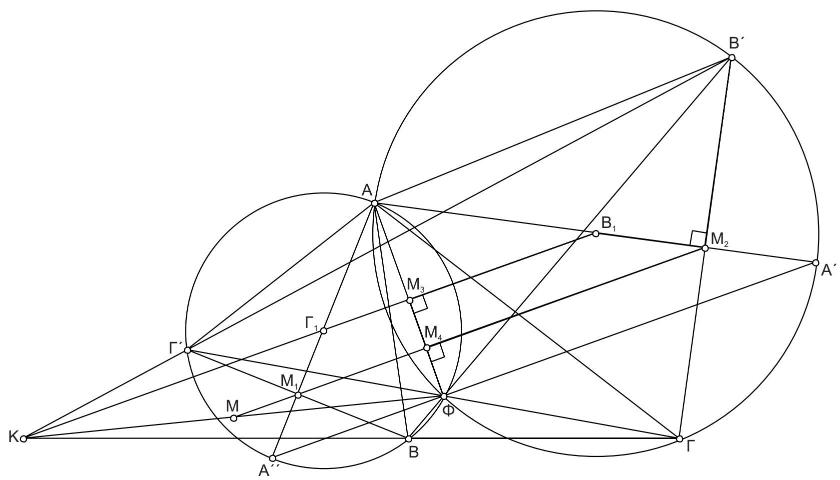
Ν ≡ ΒΒ$_1$∩ΓΓ$_1$,

Ο ≡ Β΄Β$_1$∩Γ΄Γ$_1$,

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι τα δύο τρίγωνα αυτά είναι ομολογικά,
ή ότι ΒΓ∩Β΄Γ΄∩Β$_1$Γ$_1$ ≡ Κ
(*σχήμα 2*).



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Υποθέτουμε ότι Κ ≡ ΒΓ∩Β΄Γ΄. Θα δείξουμε ότι Κ∈Β$_1$Γ$_1$.
Γράφουμε τους κύκλους ΑΒ΄Γ, ΑΒΓ΄, οι οποίοι έχουν κέντρα τα Β$_1$, Γ$_1$ αντίστοιχα, ορίζουμε τα αντιδιαμετρικά σημεία Α΄, Α΄΄ του Α στους δύο παραπάνω κύκλους αντίστοιχα.

Αν $AA' \cap B'\Gamma' \equiv M_2$, $AA'' \cap B\Gamma' \equiv M_1$, τότε τα M_2, M_1 είναι φανερό ότι είναι μέσα των $\Gamma B'$, $B\Gamma'$ αντίστοιχα, ότι αυτά είναι και τα μέσα των B_1A', Γ_1A'' αντίστοιχα, καθώς τα τρίγωνα $AB'\Gamma$, $AB\Gamma'$ είναι ισόπλευρα.

Εύκολα βρίσκουμε ότι τα τρίγωνα ABB', $A\Gamma'\Gamma$ είναι ίσα,

$$\text{οπότε } A\widehat{\Gamma'}\Phi = A\hat{B}\Phi,\ A\widehat{B'}\Phi = A\hat{\Gamma}\Phi$$

και άρα τα τετράπλευρα $A\Phi B\Gamma'$, $AB'\Gamma\Phi$ είναι εγγράψιμα, ή ότι οι κύκλοι $AB\Gamma'$, $AB'\Gamma$ περνούν από το Φ, οπότε η $B_1\Gamma_1$ είναι μεσοκάθετη στην κοινή χορδή τους $A\Phi$.
Έτσι εύκολα βρίσκουμε και ότι η $A'\Phi A''$ είναι ευθεία κάθετη στην $A\Phi$, αφού οι AA', AA'' είναι διάμετροι.
Μετά τα παραπάνω και σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή θα είναι:
$B_1\Gamma_1 \,//\, M_1M_2 \,//\, A'A''$, οπότε αν $B_1\Gamma_1 \cap A\Phi \equiv M_3$, $M_1M_2 \cap A\Phi \equiv M_4$,
επειδή $\Gamma_1M_1 = M_1A''$, θα είναι και $M_3M_4 \equiv M_4\Phi$

Θεωρούμε το πλήρες τετράπλευρο $KB\Phi\Gamma'\Gamma B'$.

Είναι γνωστό (*θεώρημα Πάππου*), ότι τα μέσα M_2, M_1, M των διαγωνίων του $B'\Gamma$, $B\Gamma'$, $K\Phi$ αντίστοιχα, είναι συνευθειακά. Δηλαδή η M_1M_2 περνά από το μέσον M της $K\Phi$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι στο τρίγωνο $K\Phi M_3$ η M_4M συνδέει τα μέσα M_4, M των $M_3\Phi$, ΦK αντίστοιχα και $B_1M_3\Gamma_1 \,//\, M_1M_2$.
Τούτο φανερώνει ότι και η $M_3\Gamma_1$ ή η $B_1M_3\Gamma_1$ ή η $B_1\Gamma_1$ περνά από το K, καθώς $\Phi M = MK$.
(Όμοια αποδεικνύουμε και ότι $AB \cap A'B' \cap A_1B_1 \equiv K_1$, $\Gamma A \cap \Gamma'A' \cap \Gamma_1A_1 \equiv K_2$).

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι τα τρίγωνα $BB'B_1$, $\Gamma\Gamma'\Gamma_1$ είναι ομολογικά και άρα οι τομές Φ,N,O των ομολόγων πλευρών τους είναι συνευθειακές.

Παρατηρήσεις:

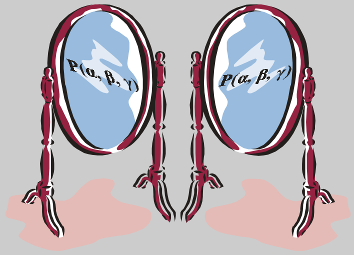
α. Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, αφού η ΦNO είναι ευθεία, ευθεία θα είναι και η KK_1K_2.

β. Από όσα μέχρι τώρα γνωρίζουμε, η Πρόταση αυτή (Θεώρημα), ήταν μέχρι τώρα μια εικασία, για την οποία υπήρχαν μόνο ενδείξεις με την βοήθεια Η/Υ (όχι με θεωρητική απόδειξη), ότι αληθεύει. Πιστεύουμε ότι η παραπάνω θεωρητική απόδειξη είναι η πρώτη που έχει γίνει, για την πρόταση αυτή. (Αυτός ήταν και ο λόγος που ασχολήθηκα),

Βιβλιογραφία:

[1]. *Νέα Στοιχεία Γεωμετρίας* του Νίκου Κυριαζή.

[2]. *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας* των Γιαν. Θωμαΐδη και Ανδρ. Πούλου.



Ανισότητες Συμμετρικών Πολυωνύμων

Λεωνίδας Ιωσηφίδης,
Φοιτητής Μαθηματικού τμήματος Α.Π.Θ.

Κάθε **πολυώνυμο** με τρεις μεταβλητές, έστω α, β, γ, καλείται **συμμετρικό** αν δεν μεταβάλλεται με οποιαδήποτε εναλλαγή των μεταβλητών του.

Π.χ. το $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ είναι συμμετρικό, διότι:

$f(\alpha,\gamma,\beta) = f(\beta,\alpha,\gamma) = f(\beta,\gamma,\alpha) = f(\gamma,\beta,\alpha) = f(\gamma,\alpha,\beta) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = f(\alpha,\beta,\gamma)$

- Κάθε τέτοιο πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση των:

$$\mathbf{S = \alpha + \beta + \gamma, \quad Q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \quad \text{και} \quad \mathbf{P = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$$

Π.χ.

- $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =} (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \boldsymbol{= S^2 - 2Q}$
- $\boldsymbol{\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta} = (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - 3\alpha\beta\gamma =$
  $\boldsymbol{= QS - 3P}$
- $\boldsymbol{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 =} (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - (\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta) =$
  $\boldsymbol{= S^3 - 3QS + 3P}$
- $\boldsymbol{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha =} (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma) \boldsymbol{= Q^2 - 2PS}$
- $\boldsymbol{\alpha^3\beta + \alpha^3\gamma + \beta^3\alpha + \beta^3\gamma + \gamma^3\alpha + \gamma^3\beta =}$
  $= (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma\cdot(\alpha+\beta+\gamma) \boldsymbol{= QS^2 - 2Q^2 - PS}$
- $\boldsymbol{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) =} \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma =$
  $\boldsymbol{= QS - P}$
- $\boldsymbol{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 =} (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) - (\alpha^3\beta+\alpha^3\gamma+\beta^3\alpha+\beta^3\gamma+\gamma^3\alpha+\gamma^3\beta) =$
  $\boldsymbol{= S^4 - 4QS^2 + 2Q^2 + 4PS}$
- $\boldsymbol{(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma) =}$
  $= -(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) - 2\alpha\beta\gamma + (\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta) =$
  $\boldsymbol{= -S^3 + 4QS - 8P}$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός σε πολλές περιπτώσεις μάς διευκολύνει στην παραγοντοποίηση συμμετρικών πολυωνύμων.

1η εφαρμογή:
Να γίνει γινόμενο η παράσταση: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$

Λύση:
Είναι: $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = S^3 - 3QS + 3P - 3P = S^3 - 3QS = S(S^2 - 3Q) =$
$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot[(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)] =$
$= (\alpha + \beta + \gamma)\cdot(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$.

Τύπος Euler

2η εφαρμογή:
Να γίνει γινόμενο η παράσταση: $A = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) + \alpha\beta\gamma$

Λύση:
Είναι: $A = QS - P + P = QS$, δηλαδή:
$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) + \alpha\beta\gamma = (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\alpha + \beta + \gamma)$

3η εφαρμογή:
Να γίνει γινόμενο η παράσταση:
$$(\alpha^2 - \beta\gamma)^2 + (\beta^2 - \gamma\alpha)^2 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^2$$
(*Περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ τ. 1ο – Σ. Σκοτίδας*)

Λύση:
Είναι: $(\alpha^2 - \beta\gamma)^2 + (\beta^2 - \gamma\alpha)^2 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^2 =$
$= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2 =$
$= S^4 - 4QS^2 + 2Q^2 + 4PS + Q^2 - 2PS - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) =$
$= S^4 - 4QS^2 + 3Q^2 + 2PS - 2PS =$
$= S^4 - QS^2 + 3(Q^2 - QS^2) =$
$= S^2(S^2 - Q) + 3Q(Q - S^2) =$
$= (S^2 - Q)(S^2 - 3Q) =$
$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha)$.

- Μια άλλη πολύτιμη χρήση του μετασχηματισμού είναι στην απόδειξη ανισοτήτων. Από εδώ και πέρα θεωρείται ότι $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow S, Q, P \in \mathbb{R}^+$.

Αναφέρουμε εδώ τρεις βασικές ταυτότητες:

Ανισότητα Caushy: Αν $x, y, z \geq 0$, τότε: $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$,
με το ίσον να ισχύει: αν-ν[(1)] $x = y = z$.

(1) αν-ν: αν και μόνο αν.

Ανισότητα B.C.S.[(2)] **:** Για κάθε $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) \geq \left(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3\right)^2$$

με το ίσον να ισχύει αν-ν: $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$

Ανισότητα Schur: Αν $x, y, z \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}_*$, τότε:

$$x^n(x - y)(x - z) + y^n(y - x)(y - z) + z^n(z - x)(z - y) \geq 0$$

με το ίσον να ισχύει αν-ν $x = y = z$.

Κάποιες βασικές ανισότητες μεταξύ των S, Q, P είναι οι ακόλουθες:

- Για $x = α$, $y = β$, $z = γ$ και την ανισ. Caushy έχουμε: $\mathbf{S^3 \geq 27P}$ (1)
- Για $x = αβ$, $y = βγ$, $z = γα$ και την ανισ. Caushy έχουμε: $\mathbf{Q^3 \geq 27P^2}$ (2)
- Για $x_1=α, x_2=β, x_3=γ, y_1=y_2=y_3=1$ και την ανισ. B.C.S: $\mathbf{S^2 \geq 3Q}$ (3)
- Για $x_1=αβ, x_2=βγ, x_3=γα, y_1=y_2=y_3=1$ και την ανισ. B.C.S: $\mathbf{Q^2 \geq 3PS}$ (4)
- Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{S \geq 3\sqrt[3]{P}} \\ \mathbf{Q \geq 3\sqrt[3]{P^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{SQ \geq 9P}$ (5)

Εκφράζοντας την ανισότητα Schur για n = 1, συναρτήσει των S, Q, P έχουμε:

$(x^3 + y^3 + z^3) - (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) - 3xyz \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$S^3 - 3QS + 3P - QS + 3P + 3P \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S^3 + 9P \geq 4QS}$ (6)

Η ανισότητα Schur, για n = 2, συναρτήσει των S, Q, P γράφεται:

$(x^4 + y^4 + z^4) - (x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y) + xyz(x + y + z) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$S^4 - 4QS^2 + 2Q^2 + 4PS - QS^2 + 2Q^2 + PS + PS \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\mathbf{S^4 + 4Q^2 + 6PS \geq 5QS^2} \quad (7)$$

Το ίσον στις ανισότητες (1) έως (7) ισχύει αν-ν $α = β = γ$.
(Στις (6) και (7) θεωρούμε ότι $x = α$, $y = β$, $z = γ$).

4η εφαρμογή:
Για α, β, γ > 0, να αποδειχτεί ότι:

$$\mathbf{(α^4 + β^4 + γ^4) + 5αβγ(α + β + γ) \geq 2(αβ + βγ + γα)^2}$$

[(2)] B.C.S. Buniakovski – Caushy – Schwartz

Λύση:
Θα εκφράσω την παραπάνω σχέση συναρτήσει των S, Q, P.

Έτσι: $S^4 - 4S^2Q + 2Q^2 + 4PS + 5PS \geq 2Q^2 \quad \Leftrightarrow$

$S^4 + 9PS \geq 4S^2Q \quad \Leftrightarrow \quad S^3 + 9P \geq 4SQ$

5η εφαρμογή:

Για α, β, γ > 0, να αποδειχτεί ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma \geq \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}$$

Λύση:
Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$2(S^3 - 3QS + 3P + P) \geq QS - P \quad \Leftrightarrow \quad 2S^3 - 6QS + 8P \geq QS - P \quad \Leftrightarrow$

$2S^3 + 9P \geq 7QS.$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Όμως η (3) γίνεται: } \mathbf{S^3 \geq 3QS} \\ \text{και από την (6)}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{2S^3 + 9P \geq 7QS}\,.$$

6η εφαρμογή:

Για α, β, γ > 0, να αποδειχτεί ότι:

$$\boldsymbol{\frac{\alpha}{\alpha + 2\beta + 2\gamma} + \frac{\beta}{2\alpha + \beta + 2\gamma} + \frac{\gamma}{2\alpha + 2\beta + \gamma} \geq \frac{3}{5}}$$

Λύση:
Η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\frac{\alpha}{2S - \alpha} + \frac{\beta}{2S - \beta} + \frac{\gamma}{2S - \gamma} \geq \frac{3}{5} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\alpha(2S - \beta)(2S - \gamma) + \beta(2S - \alpha)(2S - \gamma) + \gamma(2S - \alpha)(2S - \beta) \geq$$
$$\geq \frac{3}{5}(2S - \alpha)(2S - \beta)(2S - \gamma) \qquad \Leftrightarrow$$

$$4S^2(\alpha + \beta + \gamma) - 2S(2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma \geq$$
$$\geq \frac{3}{5}\left(8S^3 - 4S^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma\right) \qquad \Leftrightarrow$$

$$4S^3 - 4QS + 3P \geq \frac{3}{5}(8S^3 - 4S^3 + 2QS - P) \qquad \Leftrightarrow$$

$5(4S^3 - 4QS + 3P) \geq 3(4S^3 + 2QS - P) \quad \Leftrightarrow$

$20S^3 - 20QS + 15P \geq 12S^3 + 6QS - 3P \quad \Leftrightarrow$

$8S^3 + 18P \geq 26QS \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{4S^3 + 9P \geq 13QS}$

Αλλά, $\left.\begin{aligned} &\mathbf{3S^3 \geq 3\cdot(3Q)S = 9QS} \\ &\text{και } \mathbf{S^3 + 9P \geq 4QS} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{4S^3 + 9P \geq 13QS}$

7η εφαρμογή:

Για α, β, γ > 0, να αποδειχτεί ότι:

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\beta} \geq 2(\alpha+\beta+\gamma)$$

Λύση:

Είναι: $\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)\alpha\beta+(\beta^2+\gamma^2)\beta\gamma+(\gamma^2+\alpha^2)\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \geq 2S \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{S^2Q-2Q^2-PS}{P} \geq 2S \quad \Leftrightarrow \quad QS^2 - 2Q^2 - PS \geq 2PS \quad \Leftrightarrow \quad QS^2 \geq 3PS + 2Q^2$

Αλλά, $QS^2 \geq 3Q^2 = Q^2 + 2Q^2 \geq 3PS + 2Q^2$.

8η εφαρμογή:

Έστω ότι για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύει:

$$\alpha\beta\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma\right)+\beta\gamma\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)+\gamma\alpha\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)=0$$

να αποδειχτεί ότι: α = β = γ

Θέμα Α΄ Λυκείου στον διαγ. "Θαλής" 1998-99

Λύση:

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$\dfrac{1}{2}\left[\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\gamma+\alpha)+\gamma\alpha(\alpha+\gamma)\right]=3\alpha\beta\gamma \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{2}(QS-3P)=3P \quad \Leftrightarrow \quad QS - 3P = 6P \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{QS = 9P}$, το οποίο ισχύει αν-ν

α = β = γ λόγω της ανισότητας (5).

- Ο μετασχηματισμός βοηθά, επίσης, στην απόδειξη διαφόρων γεωμετρικών ανισοτήτων.

Ας είναι ένα τρίγωνο με πλευρές α, β, γ και έστω:

$$\mathbf{S = \alpha + \beta + \gamma, \quad Q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \quad \text{και} \quad \mathbf{P = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma}$$

Ότι αναφέρθηκε μέχρι τώρα ισχύει, μόνο που τώρα έχουμε πρόσθετες σχέσεις, λόγω των συνθηκών ύπαρξης του τριγώνου, δηλαδή:

$$\mathbf{\beta + \gamma > \alpha, \quad \gamma + \alpha > \beta, \quad \alpha + \beta > \gamma}$$

Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε:

$$\left.\begin{matrix} \alpha < \beta + \gamma \\ \beta < \gamma + \alpha \\ \gamma < \alpha + \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \alpha^2 < \alpha\beta + \alpha\gamma \\ \beta^2 < \beta\gamma + \beta\alpha \\ \gamma^2 < \gamma\alpha + \gamma\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \Rightarrow$$

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 < 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$.

Συνεπώς, σε κάθε τρίγωνο ισχύει: $\mathbf{3Q \le S^2 < 4Q}$

Θα εκφράσουμε συναρτήσει των S, Q, P την περίμετρο (2τ) του τριγώνου, το εμβαδόν του (Ε), την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου (R) και την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (ρ).

Προφανώς, $2\tau = \alpha + \beta + \gamma = S$. Από τον τύπο του Ήρωνα έχουμε:

$$E^2 = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma) = \frac{1}{16}S(S-2\alpha)(S-2\beta)(S-2\gamma) \iff$$

$$16E^2 = S(\beta + \gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - \beta)(\alpha + \beta - \gamma) = S(-S^3 + 4QS - 8P) \iff$$

$$E^2 = \frac{1}{16}(-S^4 + 4QS^2 - 8PS).$$

Ακόμη: $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R} \iff R = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4E} \iff R = \dfrac{\rho}{\sqrt{-S^4 + 4QS^2 - 8PS}}$

και $E = \rho\tau \iff 2E = \tau\rho \iff \rho = \dfrac{\sqrt{-S^4 + 4QS^2 - 8PS}}{2S}$.

9η εφαρμογή:

Σε κάθε τρίγωνο να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\mathbf{S^3 + 8P < 4QS \le S^3 + 9P}$$

Λύση:

Η σχέση $\mathbf{4QS \le S^3 + 9P}$ έχει αποδειχθεί.

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta>\gamma \Leftrightarrow \alpha+\beta-\gamma>0\\ \beta+\gamma>\alpha \Leftrightarrow \beta+\gamma-\alpha>0\\ \gamma+\alpha>\beta \Leftrightarrow \gamma+\alpha-\beta>0\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)>0 \quad \Leftrightarrow$$

$$-S^3+4QS-8P>0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S^3+8P<4QS}$$

10η εφαρμογή:

Αν α, β, γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου (θετικοί αριθμοί), να αποδείξετε ότι:

$$2<\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}-\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}\le 3$$

Θέμα Α΄ Λυκείου στον διαγ. "Ευκλείδης" 1997-98

Λύση:

Έχουμε $2<\dfrac{\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta-\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)}{\alpha\beta\gamma}\le 3 \quad \Leftrightarrow$

$2P<QS-3P-S^3+3QS-3P\le 3P \quad \Leftrightarrow \quad S^3+8P<4QS\le S^3+9P.$

- Παρατηρώντας τους τύπους των R και ρ, συναρτήσει των S, Q, P, βλέπουμε ότι: $R\cdot\rho=\dfrac{P}{2S}$. Έτσι όταν έχουμε να αποδείξουμε κάποια σχέση όπου υπάρχουν τα R και ρ, βοηθά αν την πολλαπλασιάσουμε με R ή ρ.

11η εφαρμογή:

Να αποδειχθεί ότι R ≥ 2ρ, για κάθε τρίγωνο

[*Θεώρημα Euler*]

Λύση:

$R\ge 2\rho \quad \Leftrightarrow \quad R^2\ge 2\rho R \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{P^2}{-S^4+4QS^2-8PS}\ge\dfrac{P}{S} \quad \Leftrightarrow$

$PS\ge -S^4+4QS^2-8PS \quad \Leftrightarrow \quad S^4+9PS\ge 4QS^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S^3+9P\ge 4QS}$

(Το ίσον ισχύει αν-ν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο).

12η εφαρμογή:

Για οποιοδήποτε τρίγωνο, να δειχτεί ότι:

$$\mathbf{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ge 4\sqrt{3}\,E}$$

Λύση:

Είναι: $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 4\sqrt{3}\,E \Leftrightarrow Q \geq 4\sqrt{3}\,E \Leftrightarrow Q^2 \geq 3(16E^2) \Leftrightarrow$
$Q^2 \geq 3(-S^4 + 4QS^2 - 8PS) \Leftrightarrow 3S^4 + 24PS + Q^2 \geq 12QS^2 \Leftrightarrow$
$3S^4 + 27PS + Q^2 \geq 12QS^2 + 3PS$.

$$\text{Αλλά}\quad \left.\begin{array}{r} S^3 + 9P \geq 4QS \Leftrightarrow 3S^4 + 27PS \geq 12QS^2 \\ \text{και}\quad Q^2 \geq 3PS \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(ζητούμενο).}$$

- Ένα μειονέκτημα που παρουσιάζεται στον S, Q, P μετασχηματισμό, είναι οι πολλές πράξεις που πρέπει να εκτελεστούν σε συμμετρικά πολυώνυμα με μεγάλους εκθέτες για να τα φέρουμε σε S, Q, P μορφή. Αυτό όμως ξεπερνιέται ικανοποιητικά με τη χρήση αναδρομικών τύπων.

Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$, τότε κάνοντας πράξεις, αποδεικνύεται ότι:

$$x^\nu + y^\nu + z^\nu = (x + y + z)(x^{\nu-1} + y^{\nu-1} + z^{\nu-1}) - (xy + yz + zx)(x^{\nu-2} + y^{\nu-2} + z^{\nu-2}) + \\ + xyz(x^{\nu-3} + y^{\nu-3} + z^{\nu-3}),\quad \forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq 3$$

Ο παραπάνω τύπος βοηθά στην εύρεση αναδρομικών τύπων.
Θέτοντας:

$\mathbf{A_\nu = x^\nu + y^\nu + z^\nu}$, $(\forall \nu \in \mathbb{N},\ \nu \geq 3)$, $\mathbf{S' = x + y + z}$, $\mathbf{Q' = xy + yz + zx}$ και $\mathbf{P' = xyz}$,

έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

> Αν x, y, z είναι πολυώνυμα (όχι αναγκαστικά συμμετρικά) των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε τα S΄, Q΄ και P΄ να είναι συμμετρικά πολυώνυμα ως προς α, β, γ, τότε: $\mathbf{A_\nu = S'\cdot A_{\nu-1} - Q'\cdot A_{\nu-2} + P'\cdot A_{\nu-3}}$

Με βάση το παραπάνω θεώρημα, βρίσκουμε τους ακόλουθους αναδρομικούς τύπους:

i) Για $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, έχουμε:

$S' = S$, $Q' = Q$ και $P' = P$, οπότε: $\mathbf{A_\nu = S\cdot A_{\nu-1} - Q\cdot A_{\nu-2} + P\cdot A_{\nu-3}}$

Την ακολουθία $\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu$ από εδώ και πέρα θα τη συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\sigma_\nu}$, άρα: $\boldsymbol{\sigma_\nu = S\cdot\sigma_{\nu-1} - Q\cdot\sigma_{\nu-2} + P\cdot\sigma_{\nu-3}}$, με $\sigma_0 = 3$, $\sigma_1 = S$, $\sigma_2 = S^2 - 2Q$.

ii) Για $x = \alpha\beta$, $y = \beta\gamma$, $z = \gamma\alpha$, έχουμε:

$S' = x + y + z = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = Q$,
$Q' = xy + yz + zx = \alpha\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma^2 + \alpha^2\beta\gamma = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = PS$ και
$P' = xyz = \alpha\beta\cdot\beta\gamma\cdot\gamma\alpha = P^2$, οπότε: $\mathbf{A_\nu = Q\cdot A_{\nu-1} - PS\cdot A_{\nu-2} + P^2\cdot A_{\nu-3}}$
Την ακολουθία $(\alpha\beta)^\nu + (\beta\gamma)^\nu + (\gamma\alpha)^\nu$ από εδώ και πέρα θα τη συμβολίζουμε

με $q_ν$, άρα: $\mathbf{q_ν = Q\cdot q_{ν-1} - PS\cdot q_{ν-2} + P^2\cdot q_{ν-3}}$,
με $q_0 = 3$, $q_1 = αβ + βγ + γα = Q$, $q_2 = (αβ)^2 + (βγ)^2 + (γα)^2 = Q^2 - 2PS$.

iii) Για $x = α + β$, $y = β + γ$, $z = γ + α$, έχουμε:

$S' = x + y + z = α + β + β + γ + γ + α = 2S$,

$Q' = xy + yz + zx = (α + β)(β + γ) + (β + γ)(γ + α) + (γ + α)(α + β) =$
$= αβ + αγ + β^2 + βγ + βγ + βα + γ^2 + γα + γα + γβ + α^2 + αβ =$
$= α^2 + β^2 + γ^2 + 3(αβ + βγ + γα) = S^2 - 2Q + 3Q = S^2 + Q$ και

$P' = xyz = (α + β)\cdot(β + γ)\cdot(γ + α) = QS - P$,

οπότε: $\mathbf{A_ν = 2S\cdot A_{ν-1} - (S^2 + Q)\cdot A_{ν-2} + (QS - P)\cdot A_{ν-3}}$

με $A_0 = 3$, $A_1 = 2S$ και $A_2 = (α + β)^2 + (β + γ)^2 + (γ + α)^2 =$
$= 2(α^2 + β^2 + γ^2) + 2(αβ + βγ + γα) = 2(S^2 - Q)$

iv) Για $x = α(β + γ)$, $y = β(γ + α)$, $z = γ(α + β)$, έχουμε:

$S' = α(β + γ) + β(γ + α) + γ(α + β) = 2(αβ + βγ + γα) = 2Q$

$Q' = α(β + γ)\cdot β(γ + α) + β(γ + α)\cdot γ(α + β) + γ(α + β)\cdot α(β + γ) =$
$= αβ(βγ + βα + γ^2 + γα) + βγ(γα + γβ + α^2 + αβ) + γα(αβ + αγ + β^2 + βγ) =$
$= αβ^2γ + (αβ)^2 + αβγ^2 + α^2βγ + αβγ^2 + (βγ)^2 + α^2βγ + αβ^2γ + α^2βγ +$
$+ (αγ)^2 + αβ^2γ + αβγ^2 =$
$= 3αβγ(α + β + γ) + (αβ)^2 + (βγ)^2 + (γα)^2 = 3PS + Q^2 - 2PS = Q^2 + PS$

$P' = xyz = αβγ(α + β)(β + γ)(γ + α) = P(QS - P)$,

οπότε: $\mathbf{A_ν = 2Q\cdot A_{ν-1} - (Q^2 + PS)\cdot A_{ν-2} + P(QS - P)\cdot A_{ν-3}}$

με $A_0 = 3$, $A_1 = 2Q$
και $A_2 = α^2(β + γ)^2 + β^2(γ + α)^2 + γ^2(α + β)^2 =$
$= α^2β^2 + α^2γ^2 + 2α^2βγ + β^2γ^2 + β^2α^2 + 2αβ^2γ + γ^2α^2 + γ^2β^2 + 2αβγ^2 =$
$= 2(α^2β^2 + β^2γ^2 + γ^2α^2) + 2αβγ(α + β + γ) =$
$= 2Q^2 - 4PS + 2PS = 2Q^2 - 2PS$.

v) Για $x = α + β - γ$, $y = β + γ - α$, $z = γ + α - β$, έχουμε:

$S' = x + y + z = α + β - γ + β + γ - α + γ + α - β = α + β + γ = S$.

$Q' = xy + yz + zx =$
$= (α + β - γ)(β + γ - α) + (β + γ - α)(γ + α - β) + (γ + α - β)(α + β - γ) =$
$= β^2 - (γ - α)^2 + γ^2 - (α - β)^2 + α^2 - (β - γ)^2 = (α^2 + β^2 + γ^2) + 2(αβ + βγ + γα)$
$=$
$= -S^2 + 2Q - 4Q = 4Q - S^2$.

$P' = xyz = (α + β - γ)(β + γ - α)(γ + α - β) = -S^3 + 4QS - 8P$, οπότε: $\mathbf{A_\nu = S\cdot A_{\nu-1} + (S^2 - 4Q)\cdot A_{\nu-2} + (-S^3 + 4QS - 8P)\cdot A_{\nu-3}}$

με $A_0 = 3$, $A_1 = S$ και

$$A_2 = (\alpha+\beta-\gamma)^2 + (\beta+\gamma-\alpha)^2 + (\gamma+\alpha-\beta)^2 =$$
$$= 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma + 2\beta\gamma - 2\alpha\beta - 2\gamma\alpha + 2\gamma\alpha - 2\beta\gamma - 2\alpha\beta =$$
$$= 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 3(S^2-2Q) - 2Q = 3S^2 - 8Q.$$

Θα βρούμε ένα υπολογιστικό τύπο για την ακολουθία:

$$\pi_\nu = \alpha^\nu\beta + \alpha^\nu\gamma + \beta^\nu\alpha + \beta^\nu\gamma + \gamma^\nu\alpha + \gamma^\nu\beta$$

Παρατηρούμε ότι: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha^{\nu-1}+\beta^{\nu-1}+\gamma^{\nu-1}) =$

$$= \alpha^\nu\beta + \alpha\beta^\nu + \alpha\beta\gamma^{\nu-1} + \alpha^{\nu-1}\beta\gamma + \beta^\nu\gamma + \beta\gamma^\nu + \alpha^\nu\gamma + \alpha\beta^{\nu-1}\gamma + \alpha\gamma^\nu \Leftrightarrow$$
$$Q\cdot\sigma_{\nu-1} = \pi_\nu + P\cdot\sigma_{\nu-2} \Leftrightarrow \pi_\nu = Q\cdot\sigma_{\nu-1} - P\cdot\sigma_{\nu-2}$$

Επίσης, έχουμε:

$$\sigma_{\nu+1} = S\cdot\sigma_\nu - Q\cdot\sigma_{\nu-1} + P\cdot\sigma_{\nu-2} \Leftrightarrow Q\cdot\sigma_{\nu-1} - P\cdot\sigma_{\nu-2} = S\cdot\sigma_\nu - \sigma_{\nu+1}$$

Επομένως: $\boldsymbol{\pi_\nu = Q\cdot\sigma_{\nu-1} - P\cdot\sigma_{\nu-2} = S\cdot\sigma_\nu - \sigma_{\nu+1}}$

Από τον τύπο: $\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu} = (\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu)^2 - 2(\alpha^\nu\beta^\nu + \beta^\nu\gamma^\nu + \gamma^\nu\alpha^\nu)$, προκύπτει η σχέση: $\boldsymbol{\sigma_{2\nu} = \sigma_\nu^2 - 2q_\nu}$, η οποία μας χρησιμεύει στο να υπολογίσουμε πιο γρήγορα, συναρτήσει των S, Q και P, το πολυώνυμο $\boldsymbol{\sigma_{2\nu}}$.

Ενώ από τον τύπο:

$$(\alpha\beta)^{2\nu} + (\beta\gamma)^{2\nu} + (\gamma\alpha)^{2\nu} = [(\alpha\beta)^\nu + (\beta\gamma)^\nu + (\gamma\alpha)^\nu]^2 - 2(\alpha\beta\gamma)^\nu(\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu),$$

προκύπτει η σχέση: $\boldsymbol{q_{2\nu} = q_\nu^2 - 2P^\nu\cdot\sigma_\nu}$, η οποία μας χρησιμεύει στο να υπολογίσουμε πιο γρήγορα, συναρτήσει των S, Q και P, το πολυώνυμο $\boldsymbol{q_{2\nu}}$.

Η χρησιμότητα των δύο παραπάνω τύπων φαίνεται στην επόμενη εφαρμογή:

13η εφαρμογή:

Να εκφραστεί συναρτήσει των S, Q, P η παράσταση:

$$\boldsymbol{\sigma_8 = \alpha^8 + \beta^8 + \gamma^8}$$

Λύση:

α΄ τρόπος: (Με βάση τον τύπο: $\boldsymbol{\sigma_\nu = S\cdot\sigma_{\nu-1} - Q\cdot\sigma_{\nu-2} + P\cdot\sigma_{\nu-3}}$)

$\nu = 3$: $\sigma_3 = S\cdot\sigma_2 - Q\cdot\sigma_1 + P\cdot\sigma_0 = S(S^2-2Q) - QS + 3P = S^3 - 3QS + 3P$

$\nu = 4$: $\sigma_4 = S(S^3 - 3QS + 3P) - Q(S^2 - 2Q) + PS = S^4 - 4S^2Q + 2Q^2 + 4SP$

$\nu = 5$: $\sigma_5 = S(S^4 - 4S^2Q + 2Q^2 + 4SP) - Q(S^3 - 3QS + 3P) + P(S^2 - 2Q) =$
$= S^5 - 5S^3Q + 5SQ^2 + 5S^2P - 5QP$

$$\nu = 6:\ \sigma_6 = S(S^5 - 5S^3Q + 5SQ^2 + 5S^2P - 5QP) - Q(S^4 - 4S^2Q + 2Q^2 + 4SP) + P(S^3 - 3QS + 3P) =$$
$$= S^6 - 6S^4Q + 6S^3P + 9S^2Q^2 - 12SQP - 2Q^3 + 3P^2$$
$$\nu = 7:\ \sigma_7 = S(S^6 - 6S^4Q + 6S^3P + 9S^2Q^2 - 12SQP - 2Q^3 + 3P^2) - Q(S^5 - 5S^3Q + 5SQ^2 + 5S^2P - 5QP) + P(S^4 - 4S^2Q + 2Q^2 + 4SP) =$$
$$= S^7 - 7S^5Q + 7S^4P + 14S^3Q^2 - 21S^2QP - 7SQ^3 + 7SP^2 + 7Q^2P.$$
$$\nu = 8:\ \sigma_8 = \ldots = S^8 - 8S^6Q + 8S^5P + 20S^4Q^2 - 32S^3QP - 16S^2Q^3 + 12S^2P^2 + 24SQ^2P - 8QP^2 + 2Q^4.$$

β΄ τρόπος: (Με βάση τον τύπο: $\boldsymbol{\sigma_{2\nu} = \sigma_\nu^2 - 2q_\nu}$)

Ομοίως με τον α΄ τρόπο υπολογίζουμε τα σ_3, σ_4.

Για $\nu = 3$: $q_3 = Q\cdot q_2 - PS\cdot q_1 + 3P^2 = Q(Q^2 - 2PS) - SQP + 3P^2 = Q^3 - 3QSP + 3P^2$

$\nu = 4$: $q_4 = Q(Q^3 - 3SQP + 3P^2) - PS(Q^2 - 2PS) + P^2Q = Q^4 - 4SQ^2P + 4P^2Q + 2P^2S^2.$

Έτσι:
$$\sigma_8 = \sigma_4^2 - 2q_4 = S^8 + 16S^4Q^2 + 4Q^4 + 16S^2P^2 - 8S^6P + 4S^4Q^2 + 8S^5P - 16S^2Q^3 - 32S^3QP + 16SQ^2P - 2Q^4 + 8SQ^2P - 8P^2Q - 4P^2S^2 \Leftrightarrow$$
$$\sigma_8 = S^8 - 8S^6Q + 8S^5P + 20S^4Q^2 - 32S^3QP + 16S^2Q^3 + 12S^2P^2 + 24SQ^2P - 8QP^2 + 2Q^4.$$

γ΄ τρόπος: (εκμεταλευόμενοι το γεγονός ότι: $8 = 2^3$)

Είναι $\sigma_4 = \sigma_2^2 - 2q_2 = (S^2 - 2Q)^2 - 2(Q^2 - 2PS) = S^4 - 4S^2Q + 2Q^2 + 4SP$

και $q_4 = q_2^2 - 2P^2\cdot\sigma_2 = (Q^2 - 2PS)^2 - 2P^2(S^2 - 2Q) = Q^4 - 4SQ^2P + 4P^2Q + 2P^2S^2$

Τέλος $\sigma_8 = \sigma_4^2 - 2q_4 = \ldots$

Βλέπουμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου $\nu = 2^\kappa$, χρειάζονται πολύ λιγότερες επαναλήψεις σε σύγκριση με του α άλλους δύο τρόπους.

- Οι ακολουθίες σ_ν και q_ν βοηθούν στην απόδειξη διαφόρων ανισοτήτων, ιδιαίτερα όταν εμφανίζονται μεγάλοι εκθέτες.
  Αναφέρουμε εδώ τρεις νέες βασικές ανισότητες:

■ Ανισότητα **Tchebychef:**

Αν $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ και $x_1 \geq x_2 \geq x_3$, $y_1 \geq y_2 \geq y_3$, τότε:

$$\mathbf{3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \geq (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)}$$

Το ίσον ισχύει αν-ν: $x_1 = x_2 = x_3$, $y_1 = y_2 = y_3$

■ Ανισότητα **των Δυνάμεων:**

Αν x, y, z, ν, μ$\in\mathbb{R}^+$ με ν > μ, τότε: $\left(\dfrac{\mathbf{x^\nu + y^\nu + z^\nu}}{\mathbf{3}}\right)^{\mu} \ge \left(\dfrac{\mathbf{x^\mu + y^\mu + z^\mu}}{\mathbf{3}}\right)^{\nu}$

Το ίσον ισχύει αν-ν: x = y = z.

■ Ανισότητα **της Μέσης Αριθμητικής Τιμής Δυνάμεων:**

Αν x, y, z$\in\mathbb{R}^+$ και ν ≥ 1, τότε: $\dfrac{\mathbf{x^\nu + y^\nu + z^\nu}}{\mathbf{3}} \ge \left(\dfrac{\mathbf{x + y + z}}{\mathbf{3}}\right)^{\nu}$

Η ανισότητα αντιστρέφεται όταν 0 ≤ ν ≤ 1.
Το ίσον ισχύει αν-ν: x = y = z.

- Με βάση τις παραπάνω ανισότητες για α, β, γ$\in\mathbb{R}^+$ και ν, μ$\in\mathbb{N}$ παίρνουμε τις ακόλουθες:

Αν α ≥ β ≥ γ, τότε από την ανισότητα Tchebychef για:

$x_1 = \alpha^\nu$, $x_2 = \beta^\nu$, $x_3 = \gamma^\nu$ και $y_1 = \alpha^\mu$, $y_2 = \beta^\mu$, $y_3 = \gamma^\mu$ έχουμε:

$3(\alpha^{\nu+\mu} + \beta^{\nu+\mu} + \gamma^{\nu+\mu}) \ge (\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu)(\alpha^\mu + \beta^\mu + \gamma^\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{3\sigma_{\nu+\mu} \ge \sigma_\nu \cdot \sigma_\mu}$ (8.α)

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{3q_{\nu+\mu} \ge q_\nu \cdot q_\mu}$ (8.β)

Από την ανισότητα των Δυνάμεων για: x = α, y = β, z = γ, έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu}{3}\right)^{\mu} \ge \left(\frac{\alpha^\mu + \beta^\mu + \gamma^\mu}{3}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \left(\frac{\sigma_\nu}{3}\right)^{\mu} \ge \left(\frac{\sigma_\mu}{3}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \mathbf{3^{\nu-\mu} \cdot \sigma_\nu{}^{\mu} \ge \sigma_\mu{}^{\nu}} \quad (9.\alpha)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{3^{\nu-\mu} \cdot q_\nu{}^{\mu} \ge q_\mu{}^{\nu}}$ (9.β)

Από την ανισότητα της Μέσης Αριθμητικής Τιμής Δυνάμεων, για
x = α, y = β και z = γ, έχουμε:

$$\frac{\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu}{3} \ge \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right)^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6\nu}{3} \ge \left(\frac{S}{3}\right)^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{3^{\nu-1} \cdot \sigma_\nu \ge S^\nu} \quad (10.\alpha)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{3^{\nu-1} \cdot q_\nu \ge Q^\nu}$ (10.β)

Από την ανισότητα του Cauchy, για $x = \alpha^{3\nu}$, $y = \beta^{3\nu}$ και $z = \gamma^{3\nu}$, έχουμε:

$$\alpha^{3\nu} + \beta^{3\nu} + \gamma^{3\nu} \ge 3 \cdot \sqrt[3]{\alpha^{3\nu} \cdot \beta^{3\nu} \cdot \gamma^{3\nu}} = 3(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\sigma_{3\nu} \ge 3P^{2\nu}} \quad (11.\alpha)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{q_{3\nu} \ge 3P^{2\nu}}$ (11.β)

Επίσης, από τη σχέση: $(\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu)^2 \geq \alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu}$,
παίρνουμε τη σχέση: $\boldsymbol{\sigma_\nu^2 \geq \sigma_{2\nu}}$ (12.α)

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{q_\nu^2 \geq q_{2\nu}}$ (12.β)

Από την ανισότητα B.C.S. για:
$x_1 = \alpha^\nu$, $x_2 = \beta^\nu$, $x_3 = \gamma^\nu$ και $y_1 = \alpha^\mu$, $y_2 = \beta^\mu$, $y_3 = \gamma^\mu$ ($\nu, \mu \in \mathbb{N}$) έχουμε:

$(\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu})(\alpha^{2\mu} + \beta^{2\mu} + \gamma^{2\mu}) \geq (\alpha^{\mu+\nu} + \beta^{\mu+\nu} + \gamma^{\mu+\nu})^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma_{2\nu} \cdot \sigma_{2\mu} \geq \sigma_{\mu+\nu}^2}$ (13.α)

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $\mathbf{q_{2\nu} \cdot q_{2\mu} \geq q_{\mu+\nu}^2}$ (13.β)

14η εφαρμογή:

Αν α, β, γ$\in\mathbb{R}^+$, να δειχτεί ότι:

$$\boldsymbol{\alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7 \geq (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^2}$$

Λύση:

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής: $\sigma_7 \geq SP^2$

Έχουμε: $\sigma_7 = \sigma_{1+6} \underset{(8.\alpha)}{\geq} \dfrac{\sigma_1 \cdot \sigma_6}{3} = S \cdot \dfrac{\sigma_6}{3} = S \cdot \dfrac{\sigma_{2\cdot 3}}{3} \underset{(11.\alpha)}{\geq} S \cdot \dfrac{3P^2}{3} = SP^2$.

15η εφαρμογή:

Αν α, β, γ$\in\mathbb{R}^+$ και ν$\in\mathbb{N}^*$, να δειχτεί ότι:

$$\boldsymbol{\left(\alpha^{2\nu} + \beta^{2\nu} + \gamma^{2\nu}\right)\left(\alpha^{2\nu+2} + \beta^{2\nu+2} + \gamma^{2\nu+2}\right) \geq \left(\alpha^{2\nu+1} + \beta^{2\nu+1} + \gamma^{2\nu+1}\right)^2}$$

Λύση:

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής: $\sigma_{2\nu} \cdot \sigma_{2\nu+2} \geq \sigma_{2\nu+1}^2$,
που είναι η ανισότητα B.C.S. για $\mu = \nu + 1$

16η εφαρμογή:

Αν α, β, γ$\in\mathbb{R}^+$, α, β, γ $\neq$ 0 και ν$\in\mathbb{N}$, να δειχτεί ότι:

$$\boldsymbol{3^{\nu-1}\left(\alpha^{\nu+1} + \beta^{\nu+1} + \gamma^{\nu+1}\right) \geq \left(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha\right)\left(\alpha + \beta + \gamma\right)^{\nu-1}}$$

Λύση:

Η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής: $3^{\nu-1} \cdot \sigma_{\nu+1} \geq QS^{\nu-1}$, Έτσι, $3^{\nu-1}\cdot\sigma_{\nu+1} \ge \dfrac{3^{\nu}\cdot\sigma_{\nu+1}}{3} \underset{(10.\alpha)}{\ge} \dfrac{1}{3}S^{\nu+1} = S^{\nu-1}\cdot\dfrac{S^2}{3} \underset{(3)}{\ge} S^{\nu-1}Q$

17η εφαρμογή:

Αν α, β, γ∈$\mathbb{R}$, να δειχτεί ότι:

$$\left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right)^3 \ge \left(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6\right)^2 \ge \frac{1}{3}\left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right)^3$$

Λύση:

Η παραπάνω ανισότητα γράφεται ως εξής: $\sigma_4^3 \ge \sigma_6^2 \ge \dfrac{1}{3}\sigma_4$.

Έχουμε: $\sigma_4^3 = \sigma_4\cdot\sigma_4^2 \underset{(12.\alpha)}{\ge} \sigma_4\cdot\sigma_8 \underset{(13.\alpha)}{\ge} \sigma_6^2$

και $3\sigma_6^2 = 3\sigma_6\cdot\sigma_6 \underset{(8.\alpha)}{\ge} \sigma_4\cdot\sigma_2\cdot\sigma_6 \underset{(13.\alpha)}{\ge} \sigma_4\cdot\sigma_4^2 = \sigma_4^3$.

18η εφαρμογή:

Αν α, β, γ∈$\mathbb{R}^+$, να δειχτεί ότι:

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz}\le\frac{1}{xyz}$$

Θέμα Α΄ Λυκείου στον διαγ. "Ευκλείδης" 2002-03

Λύση:

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\frac{1}{\left(x^3+y^3+z^3+xyz\right)-z^3}+\frac{1}{\left(x^3+y^3+z^3+xyz\right)-x^3}+\frac{1}{\left(x^3+y^3+z^3+xyz\right)-y^3}\le\frac{1}{xyz}$$

(Θέτουμε $\omega = \sigma_3 + P = x^3 + y^3 + z^3 + xyz$), οπότε γράφεται:

$$\frac{1}{\omega-z^3}+\frac{1}{\omega-x^3}+\frac{1}{\omega-y^3}\le\frac{1}{P} \quad \Leftrightarrow$$

$$P\cdot\left[\left(\omega-x^3\right)\left(\omega-y^3\right)+\left(\omega-z^3\right)\left(\omega-y^3\right)+\left(\omega-x^3\right)\left(\omega-z^3\right)\right]\le$$
$$\le\left(\omega-z^3\right)\left(\omega-y^3\right)\left(\omega-x^3\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$P\big(3\omega^2 - 2\omega(x^3+y^3+z^3) + (x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3) \le$$
$$\le \omega^3 - \omega^2(x^3+y^3+z^3) + \omega(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3) - P^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$3P\omega^2 - 2P\omega\sigma_3 + Pq_3 \le \omega^3 - \omega^2\sigma_3 + \omega q_3 + P^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$3P(\sigma_3^2 + 2P\sigma_9 + P^2) - 2P\sigma_3(\sigma_3 + P) + Pq_3 \le \omega^2(\omega - \sigma_3) + (\sigma_3 + P)q_3 - P^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$3P\sigma_3^2 + 6P^2\sigma_3 + 3P^3 - 2P\sigma_3^2 - 2P^2\sigma_3 + Pq_3 \le P\omega^2 + \sigma_3 q_3 + Pq_3 - P^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$P\sigma_3^2 + 4P^2\sigma_3 + 4P^3 \le P\sigma_3^2 + P^3 + 2P^2\sigma_3 + \sigma_3 q_3 \quad \Leftrightarrow$$

$$3P^3 + 2P^2\sigma_3 \le \sigma_3 q_3 \quad \Leftrightarrow \quad P^2(3P + 2\sigma_3) \le q_3\sigma_3$$

Αλλά, από την (11.β) για ν = 1 έχουμε: $q_3 \ge 3P^2$.

Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι: $3\sigma_3 \ge 2\sigma_3 + 3P \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_3 \ge 3P$,
το οποίο ισχύει, αφού είναι η (11.α) για ν = 1.

19η εφαρμογή:

Αν α, β, γ$\in\mathbb{R}^+$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3}{\beta\gamma} + \frac{\beta^3}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma^3}{\alpha\beta} \ge \alpha + \beta + \gamma$$

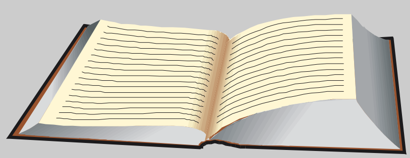
Θέμα Εθνικής Ολυμπιάδας του Καναδά το 2002

Λύση:
Η παραπάνω σχέση γράφεται ως εξής:

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \ge (\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma \quad \Leftrightarrow \sigma_4 \ge SP$$

Αλλά, $\sigma_4 = \sigma_{1+3} \underset{(8.\alpha)}{\ge} S \cdot \frac{\sigma_3}{3} \underset{(11.\alpha)}{\ge} S \cdot \frac{3P}{3} = SP$

- **Ως εφαρμογές των παραπάνω να αποδειχθούν οι έξι προτεινόμενες ασκήσεις: ✶Β55, ✶Β56, ✶Β57, ✶Β58, ✶Β59 και✶Β60.**



Συνάδελφοι,
διαδίδετε και προωθείτε το περιοδικό μας στους συναδέλφους και στους μαθητές σας.

ΑΡΜΟΝΙΚΑ ΕΞΑΠΛΕΥΡΑ

Από τον Νίκο Κυριαζή

Σχόλια Σ.Ε.

Στις σελίδες αυτές θα έπρεπε να βρίσκεται μια εξαίρετη καινούρια εργασία του κ. Νίκου Κυριαζή.

Το αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι τα **αρμονικά εξάπλευρα**. Σύμφωνα με τον ορισμό του κ. Κυριαζή, "*Αρμονικό εξάπλευρο λέγεται ένα κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, εγγράψιμο σε κύκλο, αν τα έξι τετράπλευρα ΑΒΓΕ, ΒΓΔΖ, ΓΔΕΑ, ΔΕΖΒ, ΕΖΑΓ και ΖΑΒΔ είναι αρμονικά*"

Η εργασία αποτελείται από 23 χειρόγραφες πυκνογραμμένες σελίδες και περιέχει προτάσεις με τις αποδείξεις τους, οι οποίες είναι καινούριες (δεν έχουν δημοσιευθεί ξανά).

Η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ βρίσκεται στην πολύ δυσάρεστη θέση να μη δημοσιεύσει την εργασία αυτή (προς το παρόν), λόγω του μεγάλου μεγέθους της (30 περίπου σελίδες του περιοδικού).

Όπως γράφουμε λίγο πριν από τις προτεινόμενες ασκήσεις: **"ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ: ΟΡΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ–ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ"**, η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ προσανατολίζεται στην έκδοση ειδικού τεύχους, που θα περιέχει τις μεγαλύτερες εργασίες.

Ζητούμε συγγνώμη από τον κ. Κυριαζή για την αδυναμία μας αυτή. Πρόθεσή μας είναι να δημοσιεύουμε όλες τις εργασίες που μας στέλνουν οι φίλοι μας αναγνώστες, και ειδικά τις καινούριες και πρωτοεμφανιζόμενες.

Η άσκηση – πρόκληση του ισοπλεύρου τριγώνου

Στο 1ο τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, με αφορμή το άρθρο του συναδέλφου μας **Νίκου Δεργιαδέ** από την Θεσσαλονίκη, προτείναμε για λύση μια δύσκολη άσκηση Γεωμετρίας. Ζητήσαμε από τους αναγνώστες του περιοδικού να μας στείλουν λύσεις.

Μία εύκολη λύση της άσκησης μπορεί να γίνει με τη βοήθεια του "Θεωρήματος των Συνημιτόνων", αλλά θα είχε αξία μια γεωμετρική απόδειξη, όσο γίνεται πιο σύντομη.

Η απόδειξη που δημοσιεύσαμε στο 1ο τεύχος περιέχει πολλές βοηθητικές γραμμές και δεν μας ικανοποιεί. Η διαίσθηση, αλλά και η εμπειρία μας στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (Ε.Γ.), μας λέει ότι πρέπει να υπάρχουν και πιο σύντομες λύσεις.

Ο Νίκος Δεργιαδές, στο σχετικό άρθρο του, κάνει μια πολύ σύντομη και κομψή απόδειξη, με πολύ λίγες βοηθητικές γραμμές (που τελικά δεν είναι και απαραίτητες), με τη βοήθεια των διανυσμάτων και απλών θεωρημάτων στροφής.

Τις πρώτες γεωμετρικές λύσεις στην άσκηση αυτή μας έστειλαν οι **Νίκος Κυριαζής** και **Κώστας Παλαχάνης** (και οι δύο από Θεσσαλονίκη). Ευχάριστη έκπληξη προκαλεί το γεγονός ότι κανένας από τους δύο λύτες δεν είναι μαθηματικός! Και οι δύο ασχολούνται με την Ε.Γ. από αγάπη και μόνο γι' αυτήν.

Μια τριγωνομετρική λύση μας έδωσε ο συνάδελφος και μέλος της Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ **Γιάννης Απλακίδης**, καθώς και ο συνάδελφος **Χρήστος Πατήλας** από τα Τρίκαλα. Οι λύσεις αυτές δε δημοσιεύονται στον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ.

Μια ακόμα γεωμετρική λύση με σχετικό άρθρο μας έστειλε ο συνάδελφος **Θεόφιλος Χρυσοστομίδης** από τη Βέροια. Στο ίδιο άρθρο ο κ. Χρυσοστομίδης μας έστειλε και μια γεωμετρική απόδειξη της άλλης άσκησης που παρουσίασε ο κ. Νίκος Δεργιαδές (1ο τεύχος, σελ. 70), με τη βοήθεια των θεωρημάτων της στροφής. Στις σελίδες 114-118 παρουσιάζεται το άρθρο του κ. Χρυσοστομίδη, μαζί με τις λύσεις των δύο ασκήσεων.

Δημοσιεύουμε τις επιστολές του Νίκου Κυριαζή και του Κώστα Παλαχάνη, επειδή αποτελούν κίνητρο για όλους τους πνευματικούς ανθρώπους, αλλά και απόδειξη της ομορφιάς της Ε.Γ. Προκαλούμε λοιπόν και παρακαλούμε όλους σας να μας στείλετε τις λύσεις σας. Δεν δημοσιεύουμε τη λύση που μας έστειλε ο Κώστας Παλαχάνης, επειδή παρουσιάζει ομοιότητες με τη λύση που δημοσιεύσαμε στο 1ο τεύχος.

Μαζί με την επιστολή του Νίκου Κυριαζή, δημοσιεύουμε την εκφώνηση της άσκησης και τις δύο λύσεις που μας έστειλε, με όλες τις σχετικές παρατηρήσεις και παραπομπές, που θα ικανοποιήσουν κάθε ενδιαφερόμενο. Κάναμε παρέμβαση μόνο στο σχήμα˙ διαγράψαμε μερικές γραμμές, που δεν ήταν απαραίτητες, ώστε το σχήμα να φαίνεται απλούστερο.

Η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ευχαριστεί και τους δύο συνεργάτες και παρακαλεί (ή καλύτερα "απαιτεί") για τη συνέχιση της συνεργασίας τους με το περιοδικό.

Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ δεν θα ακολουθήσει τη λογική της υποβάθμισης της Ε.Γ., που βλέπουμε να συντελείται τα τελευταία χρόνια.

Προς:
την συντακτική επιτροπή
του Παρ/τος της ΕΜΕ
Ημαθίας για το περιοδικό
"ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ"
Κοιν/ση: – Νίκο Κυριαζή
– Τιμής ένεκεν στους
κ.κ. Ανδρέα Πούλο
και Νίκο Ιωσηφίδη

Νίκος Κυριαζής
Τραπεζούντος 9
Τ.Κ. 55 139, Καλαμαριά
Τηλ. 2310 423539
Θεσ/νίκη 20-7-2003

Συνημμένα: Τρεις Σελίδες

ΘΕΜΑ: Δημοσιεύσεις

Αγαπητοί φίλοι,
κατ' αρχήν εύχομαι καλή επιτυχία στο περιοδικό σας "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ".

Η έκδοση τού περιοδικού σας με ευχαρίστησε και με συγκίνησε ιδιαίτερα, καθώς συνδέομαι με τη Βέροια και έχω πολλές και καλές αναμνήσεις, αφού έχω υπηρετήσει (στη Βέροια) για πέντε χρόνια και γι' αυτό έρχομαι πολύ συχνά εκεί.

Δεν είμαι Μαθηματικός, όμως η μεγάλη αγάπη μου για τα Μαθηματικά, με ώθησε να ασχοληθώ με τη μελέτη και την έρευνα της κατεξοχήν Ελληνικής Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Έτσι, ασχολούμαι με την Ευκλείδεια Γεωμμετρία από τη συνταξιοδότησή μου μέχρι σήμερα (16 χρόνια) και έχω γράψει πέντε βιβλία (18 τόμων συνολικά) και σαράντα δύο άρθρα, που έχουν δημοσιευθεί σε περιοδικά Ελληνικά και ξένα με πολλές επινοήσεις μου στη Γεωμετρία. (Πρόσφατα όλα τα βιβλία και τα άρθρα μου βραβεύτηκαν από την Ακαδημία Αθηνών).

Αγαπητοί φίλοι,
είδα την άσκηση της σελίδας 70 του 1ου τεύχους του περιοδικού σας "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ", την πρόκληση και τα σχόλια για την άσκηση αυτή του συντάκτη του κ. Νίκου Ιωσηφίδη και επειδή και εγώ έχω ασχοληθεί με αυτήν, αλλά και με σχετικές άλλες προτάσεις, σας στέλνω παρακάτω δύο λύσεις της, όπως και σχετικές παρατηρήσεις, με την παράκληση να τα δημοσιεύσετε στο περιοδικό σας, αν είναι δυνατόν με τις παρατηρήσεις τους.

Για την άσκηση αυτή έχω βρει αποδείξεις και στα βιβλία:

α. στις "*Σκόρπιες σταγόνες Γεωμετρίας*" του Χρ. Μπαλόγλου (τρεις αποδείξεις στη σελ. 71).

β. στη "*Γεωμετρία*" του Νίκου Κισκύρα (Άσκηση 254, μία απόδειξη).

γ. στη "*Γεωμετρία*" του Ι. Ιωαννίδη (3ος τόμος, σελ. 132, μία απόδειξη).

ΑΣΚΗΣΗ:

Σε κύκλο (Ο,R) ορίζουμε έξι διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, με ΑΒ = ΓΔ = ΕΖ = R. Να δειχθεί ότι τα μέσα M_2, M_4, M_6 των χορδών ΒΓ, ΔΕ, ΓΖ αντίστοιχα είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου (σχ. 1).

Αποδείξεις

1ος τρόπος:

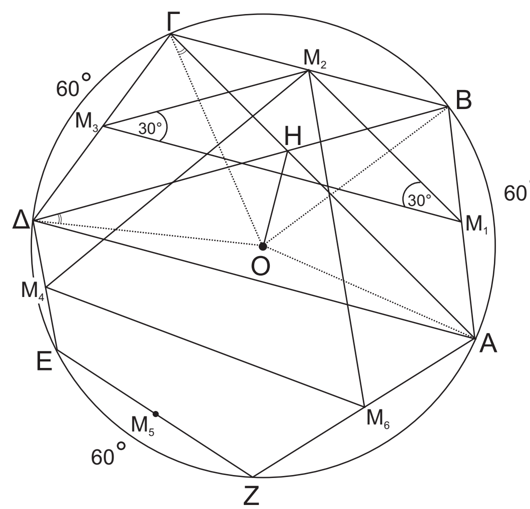
Αν M_1, M_3, M_5 είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ αντίστοιχα, τότε, επειδή ΑΒ = ΓΔ, το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ θα είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε η M_1M_3 // ΑΔ.

Ακόμη, από τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΓΔ, βρίσκουμε ότι M_1M_2 // ΑΓ, M_2M_3 // ΒΔ.

Επομένως, θα είναι:

$$M_2\widehat{M_1}M_3 = \Gamma\hat{A}\Delta,\ M_2\widehat{M_3}M_1 = B\hat{\Delta}A$$

και επειδή: $\Gamma\hat{A}\Delta = \dfrac{\Gamma\hat{O}\Delta}{2} = 30°$,



Σχήμα 1

$B\hat{\Delta}A = \dfrac{B\hat{O}A}{2} = 30°$, θα είναι $M_2\widehat{M_1}M_3 = 30°,\ M_2\widehat{M_3}M_1 = 30°$.

Τούτο σημαίνει ότι το M_2 είναι το κέντρο του ισοπλεύρου τριγώνου, που γράφεται με πλευρά την M_1M_3 και εξωτερικά του τριγώνου $M_1M_3M_5$.

Όμοια βρίσκουμε ότι και τα M_4, M_6 είναι κέντρα των ισοπλεύρων τριγώνων, που γράφονται με πλευρές M_3M_5, M_5M_1 και εξωτερικά του τριγώνου $M_1M_3M_5$.

Τα τρία όμως παραπάνω κέντρα είναι γνωστό από τη βιβλιογραφία [2], [3], ότι είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου (τρίγωνο Μεγ. Ναπολέοντα).

2ος τρόπος:

Επειδή ΟΑ = ΟΓ = ΟΒ = ΟΔ = R και επειδή

$A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta = 60° \Rightarrow A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, τα τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΒΔ θα είναι ίσα.

Άρα: ΑΓ = ΒΔ, $Α\hat{Γ}Ο = Β\hat{Δ}Ο$ (1)

Αν Η ≡ ΑΓ∩ΒΔ και τα M_1, M_3, M_5 είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ αντίστοιχα, τότε από την πρώτη των σχέσεων (1), συνεπάγεται ότι:

$$M_1M_2 = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΒΔ}{2} = M_2M_3 \;\Rightarrow\; M_1M_2 = M_2M_3, \quad (2)$$

ενώ η δεύτερη των (1) γίνεται: $Η\hat{Γ}Ο = Η\hat{Δ}Ο$ (3)

Η σχέση (3) φανερώνει ότι το τετράπλευρο ΟΗΓΔ είναι εγγράψιμο,

οπότε: $Γ\hat{Η}Δ = Γ\hat{Ο}Δ = 60° \;\Rightarrow\; Α\hat{Η}Δ = 120°$.

Ακόμη, επειδή M_1M_2 // ΑΓ, M_2M_3 // ΒΔ $\Rightarrow$

$M_1\widehat{M_2}M_3 = Α\hat{Η}Δ = 120°$ ή $M_1\widehat{M_2}M_3 = 120° \;\Rightarrow\; M_2\widehat{M_1}M_3 = M_2\widehat{M_3}M_1 = 30°$,

καθώς αληθεύει και η (2), οπότε συνεχίζουμε όπως και στην 1η παραπάνω απόδειξη.

Παρατηρήσεις:

Οι δύο παραπάνω νέες αποδείξεις και κυρίως η δεύτερη, έχουν το πλεονέκτημα ότι με τη χρησιμοποποίησή τους έχουμε τη δυνατότητα να επεκτείνουμε και να γενικεύσουμε την άσκηση αυτή. Έτσι, επιτύχαμε να αποδείξουμε (βιβλίο [1]):

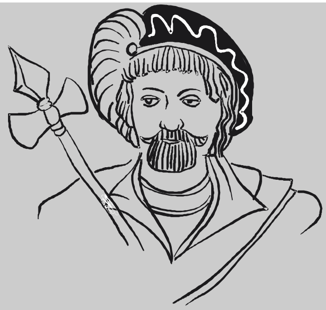
1. **Για την άσκηση αυτή, ότι:**
   - **α.** Οι διάμεσοι του εξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ συντρέχουν ($M_1M_4 \cap M_2M_5 \cap M_3M_6 \equiv K$).
   - **β.** Τα τρίγωνα ΑΓΕ, ΒΔΖ είναι ίσα.
   - **γ.** Τα μέσα M_2', M_4', M_6' των διαγωνίων ΑΔ, ΓΖ, ΒΕ αντίστοιχα, είναι κορυφές ενός άλλου ισοπλεύρου τριγώνου.
   - **δ.** Οι M_1M_4', M_3M_6', M_5M_2' συντρέχουν σε σημείο Κ΄.
   - **ε.** Οι M_2M_2', M_4M_4', M_6M_6' συντρέχουν.
   - **στ.** Όλες οι παραπάνω ιδιότητες αληθεύουν και όταν η κάθε μια χορδή ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ ανήκει σε ιδιαίτερο ομόκεντρο κύκλο (σε τρεις ομόκεντρους κύκλους), κ.α.π.
2. Για τη **γενική περίπτωση** που οι γωνίες ΑΟΒ, ΓΟΔ, ΕΟΖ είναι απλώς ίσες (όχι μόνο 60°) και οι χορδές ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ανήκουν στον ίδιο κύκλο ή σε τρεις ομόκεντρους κύκλους, ότι αληθεύουν η πρώτη (§1α), η δεύτερη (§1β), η τέταρτη (§1δ) και η πέμπτη (§1ε) παραπάνω ιδιότητες κ.α.π.
3. Πολλές άλλες καινούριες σχετικές προτάσεις, που αναφέρονται στο βιβλίο [1], δικής μας επινόησης.

Βιβλιογραφία

[1] ***Νέα Στοιχεία Γεωμετρίας*** του Νίκου Κυριαζή

[2] ***Γεωμετρία*** του Γ. Τσίντσιφα

[3] ***Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*** των Ανδρ. Πούλου και Γιάννη Θωμαΐδη.



Ο Γόρδιος δεσμός, το αυγό του Κολόμβου και η Ευκλείδεια Γεωμετρία

Θεόφιλος Χρυσοστομίδης
Μαθηματικός, Βέροια

Όλες οι μεγάλες ανακαλύψεις στην παγκόσμια ιστορία, εκτός από ορισμένες εξαιρέσεις, είναι αποτέλεσμα απλών σκέψεων, εικόνων του μυαλού, παρατηρήσεων του περιβάλλοντος (εμπειρία) και μιας ευέλικτης σκέψης με εργαλείο την επιστημονική γνώση.

Όταν ο Μέγας Αλέξανδρος έλυσε το Γόρδιο δεσμό, κόβοντάς τον με το σπαθί του, πολλοί τον αμφισβήτησαν γιατί σκέφτηκε διαφορετικά. Στη συνέχεια, η λύση που έδωσε, εντάχθηκε στην υπάρχουσα αντίληψη ως μια εύκολη λύση. Όμως χιλιάδες άνθρωποι πριν, επιχείρησαν να τον λύσουν και απέτυχαν. Είχαν δεσμεύσει τη σκέψη τους στη λέξη «λύση του δεσμού» και όχι στην ευρύτερη λύση του προβλήματος. Άλλωστε, η επιγραφή έλεγε: «*όποιος λύσει το Γόρδιο δεσμό θα κυριαρχήσει στην Ασία*». Δε δέσμευε για τον τρόπο λύσης του.

Η ίδια αμφισβήτηση υπήρχε αργότερα και για τον Χριστόφορο Κολόμβο. Για την ανακάλυψη της νέας γης, οι φίλοι του τον έλεγαν ότι το μόνο που έκανε, ήταν να χαράξει μια ίσια πορεία δυτικά. Τότε ο Κολόμβος τους έδωσε ένα αυγό για να το τοποθετήσουν όρθιο στο τραπέζι και αυτός θα συμφωνούσε μαζί τους. Μετά από επίπονη προσπάθεια δεν τα κατάφεραν και τον προκάλεσαν να το κάνει ο ίδιος. Ο Κολόμβος έσπασε το αυγό λίγο στη μύτη και αυτό στάθηκε όρθιο.

Εκ των υστέρων η λύση ενός δύσκολου προβλήματος είναι πάντα εύκολη. Πόσοι όμως σήμερα θα μπορούσαν να λύσουν το Γόρδιο δεσμό, αν δεν είχε ήδη λυθεί και πόσοι θα στήνανε όρθιο το αβγό του Κολόμβου;

Με την πάροδο του χρόνου, η φαντασία του ανθρώπου περιορίζεται, με αποτέλεσμα να γίνεται δέσμιος των υπαρχόντων αντιλήψεων και κυρίαρχων ιδεών, όλο και περισσότερο. Ο νους ακολουθεί τον δρόμο των υψηλών πιθανοτήτων, παραμερίζοντας τις χαμηλές πιθανότητες, που, πολλές φορές, είναι αυτές που δίνουν τις σοφές απλές λύσεις και παράγουν νέες ιδέες, βγάζοντάς μας από αδιέξοδα.

Η ανθρωπότητα χρειάζεται ανθρώπους με διευρυμένη αντίληψη και δημιουργική φαντασία, για την παραγωγή νέων ιδεών που θα τη βοηθήσουν να βγει από τα αδιέξοδά της. Η φαντασία αυτή υπάρχει περισσότερο στους νέους ανθρώπους και είναι καθήκον κάθε πολιτισμένης κοινωνίας να την ενθαρρύνει, διδάσκοντας στους νέους από την μαθησιακή τους ηλικία απλές έννοιες και δίνοντάς τους ευέλικτα εργαλεία σκέψης και όχι να την στραγγαλίζει, διοχετεύοντάς τους μόνο τεχνικές λύσεων ασκήσεων για τον χειρισμό των υπαρχόντων συστημάτων. **Η λογική στην υπηρεσία του νου και όχι ο νους δέσμιος της λογικής**.

Ένα διδακτικό εργαλείο ευέλικτης σκέψης είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του ανθρώπινου νου και μια τεράστια κληρονομιά για την ανθρωπότητα. Είναι ο σκελετός της τεχνολογικής ανάπτυξης, είναι ένας δημιουργικός τρόπος για την χρησιμοποίηση του νου.

Η άμεση προσέγγιση των προβλημάτων της, ευκολύνει το νου να γίνει περισσότερο ευέλικτος. Ενθαρρύνει το νέο να αντιμετωπίσει ένα πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές γωνίες και να συνειδητοποιήσει ότι υπάρχουν περισσότεροι τρόποι για να φτάσει κανείς σ' ένα σωστό συμπέρασμα. Υποκινεί το μαθητή να αναπτύξει τις δικές του δυνατότητες για τον τρόπο σκέψης.

Κατά την ενασχόληση με ένα γεωμετρικό πρόβλημα, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η διαδρομή προς τη λύση του, ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα. Νέοι επιστήμονες στην αναγέννηση, όταν ασχολήθηκαν με τη λύση άλυτων προβλημάτων, όπως ο τετραγωνισμός του κύκλου, η τριχοτόμηση της γωνίας, η κατασκευή ενός κύβου με διπλάσιο όγκο από δοθέντα κ.λπ., είχαν θαυμαστά **ενδιάμεσα αποτελέσματα**, που εμπλούτισαν την ανθρώπινη γνώση.

Δεν είναι τυχαίο ότι οι **πρωταρχικές έννοιες** σημείο, ευθεία, επίπεδο, φυσικός χώρος, αφήνονται από τον Ευκλείδη να τις αντιληφθούμε διαισθητικά, χωρίς να επιχειρείται συγκεκριμένος ορισμός. Ανάλογα με τις αντιλήψεις της εποχής, σε αυτές τις έννοιες δίνονται κάποιοι περιορισμοί, για να μπορέσει να σταθεί μια επιστημονική ανάλυση που στοχεύει στο να εξηγήσει διάφορα φαινόμενα της εποχής. Ταυτόχρονα όμως δημιουργούνται άλλα που δεν μπορούν να εξηγηθούν λόγω των αρχικών περιορισμών (θεώρημα μη πληρότητας Γκαίντελ). Έτσι για παράδειγμα οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι το σημείο είχε διάσταση, δίνοντας τις εξηγήσεις τους σε διάφορα φαινόμενα. Ο περιορισμός τους όμως, απέκλειε την ύπαρξη αρρήτων μεγεθών, πράγμα που τους οδήγησε στην παρακμή.

Ο Ευκλείδης δίνει τους δικούς του περιορισμούς, όπως δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μία ευθεία, τρία σημεία μη συνευθειακά ορίζουν ένα επίπεδο κ.λπ. και το γνωστό πέμπτο αίτημα της παραλληλίας, που απασχόλησε πολύ τους επιστήμονες της αναγέννησης, έως ότου αποδειχθεί η ανεξαρτησία του από τα άλλα αξιώματα. Αυτό ήταν και η αρχή της δημιουργίας νέων Γεωμετριών, όπως του Riemman, που εξήγησαν διάφορα φαινόμενα της εποχής και βρήκαν εφαρμογή στον ευρύτερο χώρο του διαστήματος.

Οι άλλες Γεωμετρίες, όπως η Διανυσματική Γεωμετρία, η στροφή διανύσματος κ.λπ. είναι σπουδαία και χρήσιμα αποκτήματα της ανθρώπινης σκέψης. Πηγή έμπνευσής τους είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Είναι όμως τεχνικές λύσεων προβλημάτων και όχι εστίες έμπνευσης που θα βοηθήσουν το νέο στην παραγωγή νέων ιδεών. Γι' αυτό, στη μαθησιακή ηλικία αρκεί μόνο η αναφορά σ' αυτές και επέκταση μόνον εκεί όπου χρειάζεται. Έτσι μπορεί να δοθεί το ερέθισμα σε ορισμένους νέους να ασχοληθούν μ' αυτές στις πανεπιστημιακές τους σπουδές. Άλλωστε περισσότερο χρήσιμες είναι σε ομάδες επιστημονικών ερευνών που ασχολούνται με σύνθετα, πολύπλοκα και εξειδικευμένα προβλήματα.

Μερικοί ίσως θεωρούν ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία έχει παίξει το ρόλο της˙ κανένας όμως δεν μπορεί να αρνηθεί ότι **διευρύνει την αντίληψη και διεγείρει την φαντασία!**

Με αφορμή λοιπόν το δημοσίευμα στο προηγούμενο τεύχος για την κομψή πράγματι λύση δύο γεωμετρικών προβλημάτων με στροφή διανύσματος, ας παρακολουθήσουμε δύο αντίστοιχες λύσεις με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, για τα ίδια προβλήματα.

Για το πρώτο απαιτούνται απλές γνώσεις πρώτης Λυκείου (μέχρι το 6° κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου). Για το δεύτερο απαιτούνται απλές γνώσεις δευτέρας Λυκείου (7° και 8° κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου).

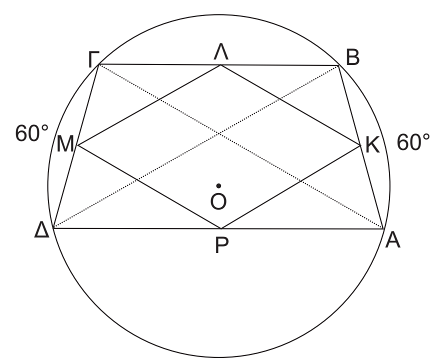
Πρόβλημα 1ο:

Α. Σε κύκλο (Ο, R) δίνονται τα τόξα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60°$. Δείξτε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και ότι τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές ρόμβου με γωνίες 60° και 120°.

Β. Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, τέτοια ώστε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{EZ} = 60°$. Να δειχθεί ότι τα μέσα των χορδών ΒΓ, ΔΕ, ΖΑ (Κ, Λ και Μ αντίστοιχα) είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

Απόδειξη:

Α.



Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60°$, έχουμε ΑΒ = ΓΔ και ΒΓ // ΔΑ, άρα ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο. Έστω Κ, Λ, Μ, Ρ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ τα Κ, Λ είναι μέσα πλευρών, άρα: $K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$, ΚΛ // ΑΓ.

Στο τρίγωνο ΔΑΓ τα Μ, Ρ είναι μέσα πλευρών, άρα: $MP = \frac{A\Gamma}{2}$, ΜΡ // ΑΓ.

Έχουμε ΚΛ // ΜΡ και ΚΛ = ΜΡ άρα ΚΛΜΡ παραλληλόγραμμο.

Στο τρίγωνο ΒΓΔ τα Λ, Μ μέσα πλευρών, άρα: $ΛΜ = \frac{ΒΔ}{2}$, ΛΜ // ΒΔ.

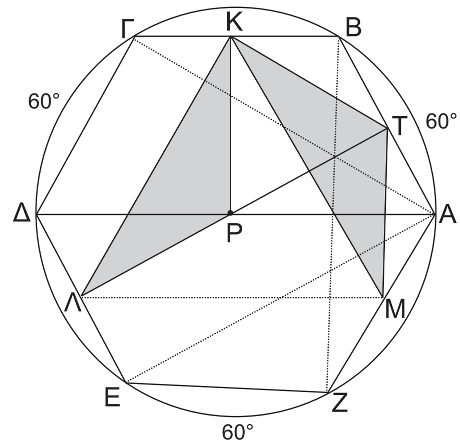
Και επειδή ΑΓ = ΒΔ, θα είναι ΚΛ = ΛΜ, άρα ΚΛΜΡ ρόμβος.

Η $Ρ\hat{Κ}Λ$ είναι ίση με τη γωνία των διαγωνίων που περιέχουν τα τόξα $\overparen{ΑΒ}, \overparen{ΓΔ}$,

άρα είναι ίση με $\frac{\overparen{ΑΒ}+\overparen{ΓΔ}}{2} = 60°$.

Συνεπώς, ΚΛΜΡ ρόμβος με $\hat{Κ} = \hat{Μ} = 60°$ και $\hat{Λ} = \hat{Ρ} = 120°$.

Β.



Επειδή $\overparen{ΑΒ} = \overparen{ΓΔ} = 60°$, το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Αν Κ μέσο της ΒΓ, Ρ μέσο της ΔΑ και Τ μέσο της ΑΒ, τότε ΚΡΤ ισόπλευρο τρίγωνο (βλέπε Α).
Έστω Κ, Λ, Μ μέσα των χορδών ΒΓ, ΔΕ και ΖΑ αντίστοιχα.
Συγκρίνω τα τρίγωνα ΚΛΡ και ΚΜΤ.
Έχουν ΚΡ = ΚΤ (1), γιατί ΚΡΤ ισόπλευρο τρίγωνο.

Στο τρίγωνο ΔΕΑ τα Λ, Ρ είναι μέσα πλευρών, άρα: $ΛΡ = \frac{ΑΕ}{2}$, ΛΡ // ΑΕ.

Στο τρίγωνο ΑΒΖ τα Τ, Μ είναι μέσα πλευρών, άρα: $ΤΜ = \frac{ΒΖ}{2}$, ΤΜ // ΒΖ.

Επειδή το ΑΒΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο, είναι ΒΖ = ΑΕ.
Άρα, ΛΡ = ΤΜ (2).

Είναι: $Λ\hat{Ρ}Κ = 90° + Δ\hat{Ρ}Λ = 90° + Δ\hat{Α}Ε = 90° + \frac{\overparen{ΔΕ}}{2}$.

Η $Κ\hat{Τ}Μ$ είναι γωνία των ΑΓ και ΒΖ, που περιέχει τα τόξα $\overparen{ΑΒ}$ και $\overparen{ΖΕΔΓ}$,

άρα $Κ\hat{Τ}Μ = \frac{\overparen{ΑΒ}+\overparen{ΖΕΔΓ}}{2} = \frac{60° + 60° + \overparen{ΔΕ} + 60°}{2} = 90° + \frac{\overparen{ΔΕ}}{2}$.

Έχουμε: $Λ\hat{Ρ}Κ = Κ\hat{Τ}Μ$ (3).

Από (1) και (2) και (3), τα τρίγωνα ΚΛΡ και ΚΜΤ είναι ίσα,

άρα: ΚΜ = ΛΚ και $Λ\hat{Κ}Ρ = Κ\hat{Μ}Τ \Rightarrow Λ\hat{Κ}Μ = Ρ\hat{Κ}Τ = 60°$,

άρα το ΚΛΜ είναι ισόπλευρο τρίγωνο.

Πρόβλημα 2ο:

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A}+\widehat{B}=2\widehat{\omega}<180^\circ$ και ΑΔ = ΒΓ. Κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα ΔΓΙ, ΑΓΖ και ΔΒΚ στη μεριά του ημιεπιπέδου της ΑΒ, που περιέχει τη Γ, ώστε: $\Delta\hat{I}\Gamma = A\hat{Z}\Gamma = \Delta\hat{K}B = \widehat{\omega}$.

α) Να δείξετε ότι Ι, Ζ, Κ συνευθειακά.

β) Εξετάστε πώς είναι τοποθετημένα τα Ι, Ζ, Κ στην ευθεία.

Απόδειξη:

Έστω Ε το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ.

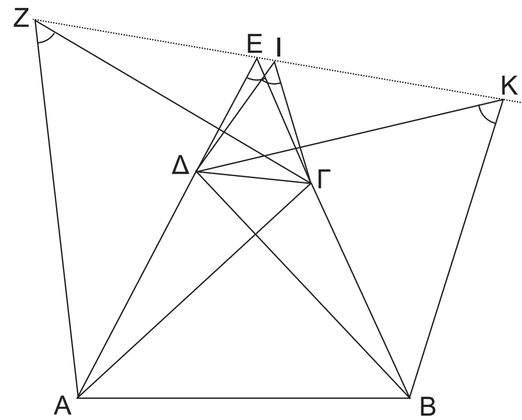
$A\hat{E}B = 180^\circ - (\widehat{A}+\widehat{B}) = 180^\circ - 2\widehat{\omega}$

Επειδή:

$A\hat{Z}\Gamma = A\hat{E}B = \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{K}B =$

$= 180^\circ - 2\widehat{\omega}$

τα τετράπλευρα ΑΖΕΓ, ΔΕΙΓ, ΔΕΚΒ είναι εγγράψιμα σε κύκλο, άρα:



α) $Z\hat{E}I = Z\hat{E}A + \Delta\hat{E}\Gamma + \Gamma\hat{E}I = Z\hat{\Gamma}A + 180^\circ - 2\widehat{\omega} + I\hat{\Delta}\Gamma =$

$= \widehat{\omega} + 180^\circ - 2\widehat{\omega} + \widehat{\omega} = 180^\circ.$

άρα Ζ, Ε, Ι συνευθειακά.

$Z\hat{E}K = Z\hat{E}A + A\hat{E}B + B\hat{E}K = Z\hat{\Gamma}A + 180^\circ - 2\widehat{\omega} + K\hat{\Delta}B =$

$= \widehat{\omega} + 180^\circ - 2\widehat{\omega} + \widehat{\omega} = 180^\circ.$

άρα Ζ, Ε, Κ συνευθειακά και επομένως **Ζ, Ι, Κ συνευθειακά**.

β) $\left.\begin{aligned} I\hat{\Delta}K &= \widehat{\omega} - K\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}B \\ I\hat{K}\Delta &= \Gamma\hat{B}\Delta \end{aligned}\right\}$ έχουμε : $\overset{\Delta}{\Delta IK} \approx \overset{\Delta}{\Delta\Gamma B} : \dfrac{IK}{\Gamma B} = \dfrac{I\Delta}{\Delta\Gamma} = \dfrac{I\Gamma}{\Delta\Gamma}$ ①

$\left.\begin{aligned} I\hat{\Gamma}Z &= \widehat{\omega} - Z\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}\Delta \\ E\hat{Z}\Gamma &= \Delta\hat{A}\Gamma \end{aligned}\right\}$ έχουμε : $\overset{\Delta}{\Gamma IZ} \approx \overset{\Delta}{\Gamma\Delta A} : \dfrac{IZ}{A\Delta} = \dfrac{\Gamma I}{\Delta\Gamma}$ ②

Από ① και ② $\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned} &\dfrac{IK}{\Gamma B} = \dfrac{IZ}{A\Delta} \\ &\Gamma B = A\Delta \end{aligned}\right\}$ $\Rightarrow$ ΙΚ = ΙΖ άρα Ι μέσο του ΖΚ.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Το επίμαχο ερώτημα 4γ στα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης (29 Μαΐου 2003)

Νίκος Ιωσηφίδης,
Μαθηματικός, Βέροια

Στις 29 Μαΐου 2003 οι υποψήφιοι Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης διαγωνίστηκαν στο μάθημα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης.

Για τα ερωτήματα αυτής της εξέτασης γράφτηκαν πολλά σχόλια. Τα περισσότερα από αυτά αφορούσαν τα ερωτήματα 3δ και το 4γ. Θα σχολιάσουμε εδώ το 4γ που δημιούργησε μεγάλη σύγχυση και αναστάτωση στους υποψηφίους εξαιτίας αντιφατικών δηλώσεων που έγιναν τις αμέσως επόμενες μέρες από τα Μ.Μ.Ε. Παραθέτουμε ολόκληρο το θέμα:

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β], που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β).

Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)\cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α. ***Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β).*** **[Μονάδες 8]**

β. ***Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε:***

$$f''(\xi_1) < 0 \text{ και } f''(\xi_2) > 0 .$$

[Μονάδες 9]

γ. ***Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.*** **[Μονάδες 8]**

Τα ερωτήματα α και β μπορούσαν να απαντηθούν (το β με αρκετή δυσκολία), αλλά το ερώτημα γ δεν μπορούσε. Για το ερώτημα γ η αναμενόμενη λύση (που βαθμολογήθηκε με άριστα) ήταν η εξής:

"*Ας υποθέσουμε ότι $\xi_1 < \xi_2$.*
Επειδή η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2] \subset [\alpha, \beta]$ και $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2) < 0$, σύμφωνα με το θ. Bolzano υπάρχει $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ με $f''(\xi) = 0$ και επειδή εκατέρωθεν του ξ η f'' αλλάζει πρόσημο, το ξ είναι σημείο καμπής".

Σύμφωνα όμως με το σχολικό βιβλίο (έκδοση Δ, 2002, ορισμός σελ. 275 και σχετικό θεώρημα σελ. 276), για να είναι το ξ σημείο καμπής, πρέπει: $f''(x)<0$ σε κάποιο διάστημα (κ, ξ) και $f''(x)>0$ σε κάποιο διάστημα (ξ, λ) (ή αντίστροφα). Εδώ έχουμε μόνο $f''(\xi_1)<0$ και $f''(\xi_2)>0$.

Αρκούν λοιπόν οι σχέσεις αυτές για να είναι το ξ σημείο καμπής;

Σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο δεν αρκούν, λόγω όμως των πολλών δεδομένων δημιουργείται το ερώτημα: "Μήπως από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτουν οι απαραίτητες προϋποθέσεις, ώστε το ξ να είναι σημείο καμπής;" Και αν ακόμη το συγκεκριμένο ξ δεν είναι σημείο καμπής, μήπως υπάρχει υποχρεωτικά κάποιο άλλο σημείο καμπής;

Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να αποδειχθεί ˙δημιουργείται λοιπόν η υποψία μήπως τα στοιχεία δεν αρκούν, δηλαδή μήπως το ερώτημα είναι λάθος.

Για να αποδειχθεί ότι το ερώτημα είναι λάθος χρειάζεται ένα κατάλληλο αντιπαράδειγμα, δηλαδή ένα παράδειγμα, όπου, ενώ ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του προβλήματος, δεν υπάρχει σημείο καμπής.

Ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα είναι το παρακάτω:*

$$f(x)=\begin{cases} -3x^3+9x^2-7x, & \text{αν } x\in[0,1) \\ 2x-3, & \text{αν } x\in[1,2] \\ -3x^3+18x^2-34x+21, & \text{αν } x\in(2,3] \end{cases}$$

Η f πληρεί τις προϋποθέσεις του ερωτήματος με α = 0, β = 3, γ = 1, δ = 2, δηλαδή: $f(0) = f(3) = 0$ και $f(1) < 0$, $f(2) > 0$.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι:

$$f'(x)=\begin{cases} -9x^2+18x-7, & \text{αν } x\in(0,1) \\ 2, & \text{αν } x\in[1,2] \\ -9x^2+36x-34, & \text{αν } x\in(2,3) \end{cases}$$

(Η παραγωγισιμότητα της f στα σημεία 1 και 2 μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια του ορισμού).

$$f''(x)=\begin{cases} -18x+18, & \text{αν } x\in(0,1) \\ 0, & \text{αν } x\in[1,2] \\ -18x+36, & \text{αν } x\in(2,3) \end{cases}$$

(Η παραγωγισιμότητα της f' στα σημεία 1 και 2 αποδεικνύεται με τη βο-

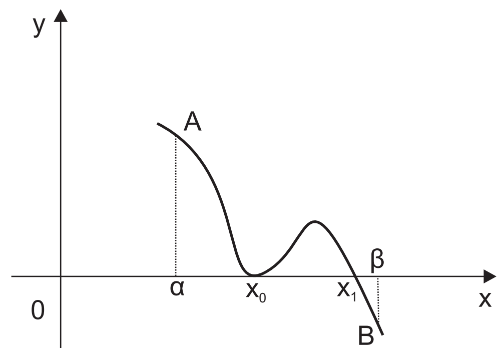
* Το αντιπαράδειγμα αυτό δημοσιεύτηκε στην τοπική πρωινή εφημερίδα ΛΑΟΣ της Βέροιας, την επομένη των εξετάσεων, δηλαδή στις 30 Μαΐου 2003. Η εφημερίδα υπάρχει και στο Internet στη διεύθυνση **www.laosver.gr**
Το αντιπαράδειγμα δημοσιεύτηκε επίσης στην εκπαιδευτική ιστοσελίδα **www.teach.gr**

ήθεια του ορισμού).

Όμως η f **δεν έχει κανένα σημείο καμπής**, αφού η f'' δεν αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν κανενός σημείου μηδενισμού της.

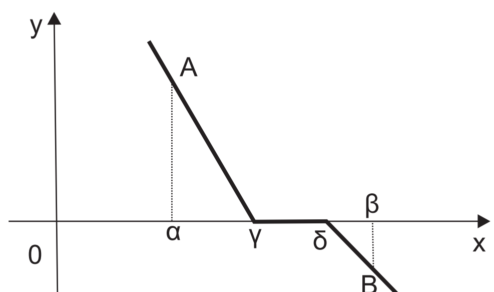
Για την κατασκευή του παραπάνω αντιπαραδείγματος έπρεπε να απαντηθούν τα εξής ερωτήματα:
Σύμφωνα με το Θ. Bolzano, αν για μια συνάρτηση f συνεχή στο [α, β] ισχύει: $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$.
Το ερώτημα που δημιουργείται είναι:
"*Εκατέρωθεν του x_0 η f αλλάζει υποχρεωτικά πρόσημο;*".

Η απάντηση είναι **όχι**, όπως προκύπτει από το διπλανό σχήμα (σχ. 1).
Δημιουργείται όμως νέο ερώτημα:
"*Μήπως σε τέτοια περίπτωση υπάρχει υποχρεωτικά και άλλο σημείο μηδενισμού x_1 της f, εκατέρωθεν του οποίου η f αλλάζει πρόσημο;*



Σχήμα 1

Πώς μπορεί μια συνεχής γραμμή, που είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, να συνδέσει τα σημεία Α και Β, που βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x΄x, να διαπεράσει με άλλα λόγια τον άξονα x΄x και εκατέρωθεν του σημείου τομής της με τον άξονα των x να μην αλλάζει το πρόσημο της f;".



Σχήμα 2

Αν και αυτό φαίνεται αδύνατο με την πρώτη ματιά, η συνάρτηση του διπλανού σχήματος (σχ. 2) έχει την παραπάνω ιδιότητα.

Στην οπτική αυτή παρατήρηση στηριχτήκαμε για να κατασκευάσουμε το παραπάνω αντιπαράδειγμα.

Η κατασκευή του συγκεκριμένου αντιπαραδείγματος απαίτησε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος 8 εξισώσεων με 10 αγνώστους, όπως δείχνουμε στη συνέχεια.

Το πρόβλημα που τίθεται εδώ είναι να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση f, τέτοια ώστε η γραφική παράσταση της f'' να έχει τη μορφή του σχ. 2.

Θέσαμε λοιπόν αυθαίρετες τιμές στα α, β, γ, δ: **α = 0, β = 3, γ = 1, δ = 2**

και απαιτήσαμε η f'' να έχει τη μορφή: $f''(x)=\begin{cases} \kappa x+\lambda, & \text{αν } x\in(0,1) \\ 0, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \mu x+\rho, & \text{αν } x\in(2,3) \end{cases}$

Τότε η f' θα έχει τη μορφή: $f'(x)=\begin{cases} \frac{\kappa}{2}x^2+\lambda x+c_1, & \text{αν } x\in(0,1) \\ c_2, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \frac{\mu}{2}x^2+\rho x+c_3, & \text{αν } x\in(2,3) \end{cases}$

και η f θα έχει τη μορφή: $f(x)=\begin{cases} \frac{\kappa}{6}x^3+\frac{\lambda}{2}x^2+c_1x+c_4, & \text{αν } x\in[0,1) \\ c_2x+c_5, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \frac{\mu}{6}x^3+\frac{\rho}{2}x^2+c_3x+c_6, & \text{αν } x\in(2,3] \end{cases}$

Θα δούμε αν υπάρχουν κατάλληλες τιμές των: **κ, λ, μ, ρ, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5** και **c_6**, ώστε η f να πληρεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος.

Όπως φαίνεται παρακάτω, πρέπει να ικανοποιούνται 8 συνθήκες, επομένως χρειαζόμαστε 8 ανεξάρτητες εξισώσεις με ισάριθμους αγνώστους. Δίνουμε λοιπόν αυθαίρετες τιμές σε δύο αγνώστους, π.χ. $c_2 = 2$, $c_3 = -3$, ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις $f(1) < 0$, $f(2) > 0$.

Επομένως: $f(x)=\begin{cases} \frac{\kappa}{6}x^3+\frac{\lambda}{2}x^2+c_1x+c_4, & \text{αν } x\in[0,1) \\ 2x-3, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \frac{\mu}{6}x^3+\frac{\rho}{2}x^2+c_3x+c_6, & \text{αν } x\in(2,3] \end{cases}$

άρα: $f'(x)=\begin{cases} \frac{\kappa}{2}x^2+\lambda x+c_1, & \text{αν } x\in(0,1) \\ 2, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \frac{\mu}{2}x^2+\rho x+c_3, & \text{αν } x\in(2,3) \end{cases}$ και: $f''(x)=\begin{cases} \kappa x+\lambda, & \text{αν } x\in(0,1) \\ 0, & \text{αν } x\in[1,2] \\ \mu x+\rho, & \text{αν } x\in(2,3) \end{cases}$

Οι 8 σχέσεις που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό των **κ, λ, μ, ρ, c_1, c_3, c_4, c_6** είναι οι εξής:

- $f(0) = 0 \Leftrightarrow$ **$c_4 = 0$**

- $f(3) = 0 \Leftrightarrow \frac{9\mu}{2} + \frac{9\rho}{2} + 3c_3 + c_6 = 0$ (1)
- Συνέχεια της f στο 1: $\frac{\kappa}{6} + \frac{\lambda}{2} + c_1 = -1$ (2)
- Συνέχεια της f στο 2: $\frac{4\mu}{3} + 2\rho + 2c_3 + c_6 = 1$ (3)
- Παραγωγισιμότητα της f στο 1: $\frac{\kappa}{2} + \lambda + c_1 = 2$ (4)
- Παραγωγισιμότητα της f στο 2: $2\mu + 2\rho + c_3 = 2$ (5)
- Παραγωγισιμότητα της f' στο 1: $\kappa + \lambda = 0$ (6)
- Παραγωγισιμότητα της f' στο 2: $2\mu + \rho = 0$ (7)

Λύνουμε το σύστημα των (1), (2), (3), (4), (5), (6) και (7):

- (6) $\Leftrightarrow \lambda = -\kappa$
- (7) $\Leftrightarrow \rho = -2\mu$

Αντικαθιστούμε στις υπόλοιπες:

- $\frac{9\mu}{2} - 9\mu + 3c_3 + c_6 = 0$ (1α)
- $\frac{\kappa}{6} - \frac{\kappa}{2} + c_1 = -1$ (2α)
- $\frac{4\mu}{3} - 4\mu + 2c_3 + c_6 = 1$ (3α)
- $\frac{\kappa}{2} - \kappa + c_1 = 2$ (4α)
- $2\mu - 4\mu + c_3 = 2$ (5α)

Από τη λύση του συστήματος των (1α), (3α) και (5α) προκύπτει:

$$\boldsymbol{\mu = -18,\ c_3 = -34,\ c_6 = 21}$$

και από τη λύση του συστήματος των (2α) και (4α): $\boldsymbol{c_1 = -7}$, $\boldsymbol{\kappa = -18}$, άρα:

$$\boldsymbol{\lambda = -\kappa = 18} \text{ και } \boldsymbol{\rho = -2\mu = 36}.$$

Επομένως, μια συνάρτηση f που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του προβλήματος και δεν έχει σημεία καμπής είναι η:

$$f(x) = \begin{cases} -3x^3 + 9x^2 - 7x, & \text{αν } x \in [0,1) \\ 2x - 3, & \text{αν } x \in [1,2] \\ -3x^3 + 18x^2 - 34x + 21, & \text{αν } x \in (2,3] \end{cases}$$

Τελικά, η γη κινείται ή δεν κινείται;

[το διαχρονικό πρόβλημα των ... ιεροεξεταστών]

Γιάννης Κερασαρίδης,
Μαθηματικός, Αθήνα

Α΄ Μέρος: Η "ερώτηση" και η απάντηση

Δεν πέρασε παρά μια βδομάδα από τότε που τα παιδιά της Γ΄ Λυκείου "Θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης" κλήθηκαν να κάνουν το εξής καταπληκτικό: να αποδείξουν ότι ένας *ψευδής* ισχυρισμός, είναι *αληθινός!!* Τέτοια φαινόμενα συναντάμε τακτικά στην Ιστορία (π.χ. η Γη δεν κινείται, έπρεπε να αποδείξουν τα θύματα της Ιερής Εξέτασης κ.λπ., κ.λπ.). Να, όμως, που μια βδομάδα αργότερα, τα παιδιά της Β΄ Λυκείου καλούνται να απαντήσουν "ισορροπημένα" σε μια ανισόρροπη ερώτηση, στη Γεωμετρία Β΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας [Θέμα $1^{ο}$, ερώτημα Β(δ)].

Το ερώτημα:

Τα παιδιά κλήθηκαν να αποφανθούν αν είναι σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) η διατύπωση ενός θεωρήματος που υπάρχει μέσα στο σχολικό βιβλίο (γνωστό σαν "δεύτερο θεώρημα των διαμέσων"). Να πως τέθηκε το ερώτημα:

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$

Α. ……………………………………………………………………………

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος**" αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση*

………………………………………………………………………..

δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή**.**

Η ζητούμενη απάντηση:

Να τι έπρεπε να απαντήσουν τα παιδιά, σύμφωνα με την ΚΕΕΕΛ [**Κ**εντρική **Ε**πιτροπή **Ε**ξετάσεων ημερησίων **Ε**νιαίων **Λ**υκείων]:

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

Α. ……………………………………………………………………………

Β(δ).……………………**Σ »**

Τι γράφει το ισχύον σχολικό βιβλίο, [σελίδα 196]

«Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή»

Προκαταρκτική παρατήρηση:

Όπως παρατηρούμε οι δύο εκφωνήσεις (του ισχύοντος σχολικού βιβλίου και του ερωτήματος, όπως τέθηκε στις εξετάσεις), είναι *ταυτόσημες*, αδιακρίτως αν είναι αληθείς ή ψευδείς. *Τελικά… η Γη κινείται ή όχι;*

Ας εξετάσουμε με νηφαλιότητα το θέμα κι ας ξεχάσουμε πως ζούμε στην εποχή των δορυφόρων, των διαστημοπλοίων, της πληροφορίας κι άλλα φανταχτερά παρόμοια. Από την πρώτη γυμνασιακή τάξη, για να πείσουμε τα παιδιά ότι πρέπει να αγαπήσουν τα Μαθηματικά ή ότι τα Μαθηματικά είναι χρήσιμα στην καθημερινή μας ζωή ή ότι τα Μαθηματικά είναι μια λογική αλυσίδα που η αλήθεια κάθε επόμενου κρίκου "πατάει" στην αλήθεια του προηγούμενου κρίκου, το κατ' εξοχή επιχείρημά μας είναι η *πλήρης συνέπεια* του μαθηματικού λόγου.

Για παράδειγμα λέμε στα παιδιά πως:

i) "ένας θετικός αριθμός (που δεν είναι μηδέν) *ποτέ* δεν μπορεί να είναι ίσος με έναν αρνητικό αριθμό",

ii) στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, που διδασκόμαστε, "*δεν νοείται μήκος αρνητικό*",

iii) αν αφαιρέσουμε ένα θετικό αριθμό b από έναν άλλο θετικό αριθμό a και συμβεί $a<b$ τότε η διαφορά $a-b$ θα είναι *αρνητική*,

iv) το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι *πάντα* θετικός αριθμός.

Για να δούμε, όμως, τι συνέβη με το παραπάνω θέμα των Πανελλαδικών˙ σύμφωνα με την εκφώνηση του θέματος, το δεύτερο μέλος είναι γινόμενο δύο θετικών αριθμών, άρα είναι *θετικό*. Σύμφωνα με την εκφώνηση το πρώτο μέλος είναι διαφορά δύο θετικών αριθμών, δηλ. $a-b$, άρα μπορεί να είναι θετική (αν $a>b$) ή αρνητική (αν $a<b$). Επομένως το πρώτο μέλος είναι άλλοτε θετικό και άλλοτε αρνητικό˙ κατά συνέπεια *δεν είναι πάντα ίσο με το δεύτερο μέλος*, άρα ο ισχυρισμός του ερωτήματος είναι άλλοτε *σωστός* (**Σ**) άλλοτε *λάθος* (**Λ**).

Όμως η ΚΕΕΕΛ είναι κατηγορηματική σ' αυτό το θέμα: Τα παιδιά πρέπει να απαντήσουν ότι ο ισχυρισμός του θέματος είναι *σωστός* (**Σ**). Προφανώς, οι άνθρωποι της ΚΕΕΕΛ που έθεσαν αυτό το ερώτημα, είχαν υπ' όψη τους τη διατύπωση του ισχύοντος σχολικού βιβλίου, κατά συνέπεια, γι' αυτούς είναι *σωστή*.

Εδώ μπαίνει το ερώτημα: αν ένα παιδί, που έχει υπ' όψη του την παραπάνω συλλογιστική, απαντήσει με την ένδειξη *«λάθος (Λ)»* τι θα κάνουμε εμείς οι βαθμολογητές; Θα θεωρήσουμε ότι απάντησε λαθεμένα και άρα θα χάσει το παιδί το θέμα; Μα, όλα τα παιδιά, που παίρνουν στα χέρια τους τις εκφωνήσεις των θεμάτων, διαβάζουν στη σελίδα 4, «Οδηγίες (για τους εξεταζόμενους)», τα εξής: «4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι *αποδεκτή*».

Αν λάβουμε υπ' όψη μας πως στα ερωτήματα Β (α,β,γ,δ) του $1^{ου}$ θέματος, α) *δεν είναι υποχρεωμένα* να τεκμηριώσουν τις απαντήσεις τους γραπτώς και β) για κάθε απάντηση (στα θέματα αυτής της μορφής) είτε είναι σωστή είτε λαθεμένη, θεωρείται δεδομένο ότι ο υποψήφιος έκανε μια σειρά συλλογισμών "από μέσα του" και αποφάσισε να απαντήσει με (**Σ**) η (**Λ**), τότε τι πρέπει να κάνουμε εμείς; Θα συνεχίσουμε να λέμε πως «η Γη δεν κινείται, αφού η επίσημη εκκλησία που "ορθοτομεί τον λόγο της αληθείας" θέλει να μη κινείται η Γη» ή θα πούμε πως αυτό το παιδί κερδίζει με την αξία του το θέμα. Εμείς προτείνουμε το δεύτερη εκδοχή.

Β΄ Μέρος: Η αμαρτία έχει πάντα παρελθόν

10-6-2000. Την ημέρα αυτή τα παιδιά της Β΄ Λυκείου εξετάζονταν στο μάθημα της Γεωμετρίας Γενικής Παιδείας, στα πλαίσια των Πανελλαδικών Εξετάσεων.

Επικεντρώνουμε την προσοχή μας στο:

ΘΕΜΑ $1^{Ο}$

……………………………………………………………………………………

Α2. *Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ να συμπληρώσετε τη σχέση*
$ΑΓ^2 – ΑΒ^2 =$………..
ώστε να εκφράζει το δεύτερο το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Όπως είναι γνωστό διόρθωση και η βαθμολόγηση γίνεται με βάση κάποιες ενδεικτικές απαντήσεις που θεωρούνται επίσημες. Η ενδεικτική απάντηση σ' αυτό το ερώτημα ήταν η παρακάτω:

ΘΕΜΑ 1^{Ο}

…………………………………………………………………………………………

Α2. $A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$

όπου ΜΔ η προβολή της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ στην ΒΓ.

Το σχολικό βιβλίο εκείνης της χρονιάς έλεγε, στη σελίδα 219: «*Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω σ' αυτήν, δηλαδή:* $A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$»

Σχόλιο:

i) Αν προσέξατε, στην εκφώνηση του θέματος, στις πανελλαδικές, σημειώνεται ότι: ΑΒ < ΑΓ, ενώ, στο ισχύον σχολικό βιβλίο εκείνης της χρονιάς, υπάρχει η ίδια λαθεμένη διατύπωση που υπάρχει στο νέο βιβλίο που ισχύει για τις φετινές εξετάσεις!! Ερώτημα αγανάκτησης: ποιος θα μας σώσει από τους "σωτήρες" μας;

ii) Αν προσέξατε [*στην εκφώνηση του θεωρήματος 9.8 (σχολικό βιβλίο, σελ. 219, …)*] αναφέρονται τα γράμματα Α,Β,Γ,Μ,Δ χωρίς να ορίζει τι εκπροσωπεί το καθένα στην πρόταση αυτή.

Ερώτημα αγανάκτησης: τι βαθμό θα βάλουμε στους συγγραφείς αυτών των συγκεκριμένων σχολικών βιβλίων;

Γ΄ Μέρος: Το απαραίτητο "ηθικό" δίδαγμα

Ο Αλεξέϊ Λεόντιεφ (1903-1979) ήταν ο άνθρωπος που στη διάρκεια του 20^{ου} αιώνα αποκωδικοποίησε τις διαδικασίες γένεσης και ανάπτυξης της *συνείδησης* και της *προσωπικότητας* του ανθρώπου. Στην αρχή της δεκαετίας του 1970, ο Λεόντιεφ δημοσίευσε στην επιθεώρηση "Question de Philosophie" μια σειρά άρθρων που ήταν αφιερωμένα στα θεωρητικά και μεθοδολογικά προβλήματα της ανθρώπινης Ψυχολογίας.

Ένα απ' αυτά τα άρθρα είχε σαν θέμα "Τα Ψυχολογικά Προβλήματα της Συνείδησης στην Παιδαγωγική". Σ' αυτό το έργο μαθαίνουμε τι σημαίνει για τη συνείδηση του παιδιού το να διδάσκεται την ίδια έννοια με δυο διαφορετικές εκδοχές (όταν και οι δυο εκδοχές ισχυρίζονται πως αποδίδουν το ίδιο πράγμα) και, όμως, στην πραγματικότητα με βάση τους κανόνες που τέθηκαν, αλληλο-γρονθοκοπούνται.

Γιατί θυμηθήκαμε τον Λεόντιεφ; την απάντηση την περιμένουμε από σας, έστω και μετά ένα χρόνο…………..

Παράπλευρες απώλειες στη μάχη των εξετάσεων

Γιώργος Ρίζος
Μαθηματικός, Κέρκυρα

Μερικές φορές τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων στα Μαθηματικά έχουν και μία άλλη παρενέργεια. Αναδεικνύουν και μεγενθύνουν, με τον τρόπο που διατυπώνονται, τυχόν λάθη και ατέλειες των Σχολικών Βιβλίων.

Π.χ. τα ερωτήματα τύπου Σωστό-Λάθος το 2003 δεν είχαν ίχνος ερωτήσεων κρίσης, αλλά έδιναν κάποιους ορισμούς ή τύπους, άλλοτε σωστούς και άλλοτε παραποιημένους και ο μαθητής έπρεπε απλά να ξεχωρίσει ποιοι είναι σωστοί και ποιοι όχι.

Παράδειγμα 1ο

Στη Γεωμετρία Β΄ Λυκείου Γενικής Παιδείας 2003, στο Θέμα 1, Βδ δόθηκε η εκφώνηση του 2ου Θεωρήματος Διαμέσων τριγώνου, όπως ακριβώς διατυπώνεται στο βιβλίο:

> "*Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή*". ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ;

Βεβαίως, στα τέσσερα τελευταία σχολικά βιβλία:

- Βαρουχάκη-Παπαμιχαήλ κ.α. 1986,
- Αλιμπινίση-Δημάκου κ.α. 1991,
- Θωμαΐδη, Ξένου κ.α. 1999
- Αργυρόπουλου-Βλάμου κ.α. 2002

η εκφώνηση διατυπώνεται ακριβώς έτσι και ο περιορισμός $\beta > \gamma$ δίνεται στην απόδειξη. Μάλιστα σε μερικά μελετάται και η γεωμετρικά τετριμμένη περίπτωση του ισοσκελούς τριγώνου.

Βεβαίως, στη Γεωμετρία δεχόμαστε ότι όταν αφαιρούμε μέτρα γωνιών ή μήκη πλευρών, το εξαγόμενο είναι θετικός αριθμός,.

Όμως... θα ήταν πολύ δύσκολο να συμπληρωθεί η εκφώνηση με τη φράση: "*η θετική διαφορά...*" ή "*το απόλυτο της διαφοράς...*", ώστε ο προσεκτικός μαθητής, που δεν αποστηθίζει το βιβλίο, να μην βρεθεί στο δίλημμα "*μήπως η ερώτηση είναι παγίδα;*".
Η διατύπωση που δόθηκε ενισχύει την κριτική σκέψη ή την παπαγαλία;

Με την ευκαιρία, παραθέτω εδώ τις αντίστοιχες διατυπώσεις από κάποια παλιά "αυστηρά" σχολικά βιβλία:

> Ἐπίσης εἶναι γνωστὸν ὅτι :
>
> $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot A_1H. \qquad \beta > \gamma \qquad (2)$
>
> Δηλαδή : **Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς τρίτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ἐπὶ ταύτην.**

Ι. Πανάκη, 1970, σελ 41

> § **209.** *Θεώρημα ΙΙ.* **Ἂν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, ΑΔ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ΑΓ > ΑΒ, θὰ εἶναι : $(\text{ΑΓ})^2 - (\text{ΑΒ})^2 = 2(\text{ΒΓ})(\text{ΔΜ})$** (σχ. 158 β΄).

Ν. Νικολάου, 1971, σελ 178

> **309. Δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις :**
>
> $$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \text{ΜΔ}$$
>
> **(ὑποτιθεμένου ὅτι $\beta \geqq \gamma$), ὅπου Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Δ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ.**

Χρ. Παπανικολάου, 1975, σελ. 210

Στα βιβλία αυτά ξεχειλίζει η αυστηρότητα και η ακριβολογία. Δεν ζητά κανείς επιστροφή στη δεκαετία του '70, αλλά απλά να μην ισοπεδώνουμε τα πάντα στο όνομα της "απλότητας".

Παράδειγμα 2ο

Στα Μαθηματικά Γ΄ Εσπερινού Λυκείου Γενικής Παιδείας, 2003, Θέμα 1ο Βδ:

"Ο συντελεστής μεταβολής CV ορίζεται (για $\bar{x} \neq 0$) από τον λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}\text{"}$$

Εσείς τι λέτε; Είναι Σωστό ή Λάθος; Ειλικρινά δεν ξέρω τι να απαντήσω!

Στο σχολικό βιβλίο, στο "κουτάκι" ο τύπος δίνεται έτσι. Παρακάτω όμως αντιμετωπίζεται και η περίπτωση η μέση τιμή να είναι αρνητικός αριθμός, οπότε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$.

Εδώ δεν αρκεί να ξέρει κανείς Μαθηματικά˙ πρέπει να έχει και μαντικές δυνατότητες για να μαντέψει τι ζητά ο συντάκτης των θεμάτων.
Παρατηρούμε ότι στην Α΄ έκδοση του 1999 **ΔΕΝ** περιέχεται στο σχολικό βιβλίο η περίπτωση αρνητικής μέσης τιμής. Μήπως έβαλαν τα θέματα συμβουλευόμενοι αυτήν την έκδοση;

Ένα μέτρο με το οποίο μπορούμε να ξεπεράσουμε τις παραπάνω δυσκολίες και το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας** (coefficient of variation), ο οποίος ορίζεται από το λόγο: $CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$ Ο συντελεστής μεταβολής είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης,	Ένα μέτρο με το οποίο μπορούμε να ξεπεράσουμε τις παραπάνω δυσκολίες και το οποίο μας βοηθά στη σύγκριση ομάδων τιμών, που είτε εκφράζονται σε διαφορετικές μονάδες μέτρησης είτε εκφράζονται στην ίδια μονάδα μέτρησης, αλλά έχουν σημαντικά διαφορετικές μέσες τιμές, είναι ο **συντελεστής μεταβολής** ή **συντελεστής μεταβλητότητας** (coefficient of variation), ο οποίος ορίζεται (για $\bar{x} \neq 0$) από το λόγο: $CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} = \frac{s}{\bar{x}}$. Αν $\bar{x} < 0$ τότε αντί της $\bar{x}$ χρησιμοποιούμε την $\lvert \bar{x} \rvert$.
Έκδοση 1999	Έκδοση 2002

Μήπως όμως πράγματι ήθελαν ως απάντηση την επιλογή ΛΑΘΟΣ. Αν κάποιος έχει τις απαντήσεις της επιτροπής εξετάσεων, ας μας διαφωτίσει...

Συμπέρασμα: Η επιλογή των συγγραφέων του σχολικού βιβλίου να δώσουν με αυτόν τον τρόπο τον ορισμό του CV, μετατράπηκε σε αμφιλεγόμενο θέμα, με ευθύνη των θεματοδοτών κι όχι των συγγραφέων.

• Παρακάτω (στο Βε), ζητείται από τους υποψηφίους των εσπερινών να αποφανθούν αν είναι σωστός ή όχι ο τύπος της διακύμανσης:

$$s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 v_i$$

Ελέγχεται δηλαδή η απομνημόνευση και μόνο του τύπου και όχι η δυνατότητα εφαρμογής. Το 2001 υπήρχε οδηγία του υπουργείου να δίνονται οι τύποι αυτοί στους μαθητές. Το 2002 δεν δόθηκε αυτή η οδηγία. Άρπαξαν λοιπόν την ευκαιρία οι θεματοδότες να ελέγξουν αν έχουν δυνατό μνημονικό οι μαθητές των εσπερινών.

Προτείνουμε του χρόνου να μπουν θέματα του τύπου: "*Διατυπώστε την πρόταση που βρίσκεται στη σελίδα 125 του σχολικού βιβλίου, 5 αράδες από το τέλος...*".

• Τέλος, παρακάτω (Θέμα 3ο), ζητείται να βρεθεί το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2+5}$, $x \in \mathbb{R}$ **τέμνει** τον άξονα x΄x.

Βέβαια, η γραφική παράσταση **εφάπτεται** στον x΄x στο σημείο O(0, 0) και **δεν τον τέμνει**. Μην πει κανείς ότι τομή και επαφή είναι το ίδιο "με την ευρεία έννοια"... Χάνουν οι λέξεις το νόημά τους.

Επίσης, στη θεωρία του βιβλίου Γενικής Παιδείας **δεν δίνεται βαρύτητα σε τέτοια θέματα**. Θα έλεγα ότι δεν ασχολείται καν˙ δεν φαίνεται να περιέχεται δηλαδή κάτι τέτοιο στους στόχους του προγράμματος για τη Γενική Παιδεία, ούτε βέβαια σχετική άσκηση ή παράδειγμα υπάρχει. Δεν φέρνει σε μειονεκτική θέση τα παιδιά της Θεωρητικής Κατεύθυνσης η επιλογή του θέματος αυτού;

- Ας θέσουμε τώρα ένα υποθετικό ερώτημα:

Έστω ότι κάποια χρονιά θα ζητηθεί ως ερώτηση τύπου ΣΩΣΤΟ - ΛΑΘΟΣ ο τύπος του ορισμένου ολοκληρώματος, (ολοκλήρωμα Riemann):

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right).$$

Τι λέτε; Είναι ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ;

Πριν βιαστήτε να απαντήσετε ΣΩΣΤΟ, δείτε **το κουτάκι** στη σελίδα 330 του σχ. βιβλίου Γ΄ Θετ. Κατεύθυνσης:

330 *3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ*

Αποδεικνύεται ότι,

"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left(\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

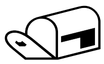
Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή,

$$\boxed{\int_\beta^\alpha f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)}$$

Μέχρι το 2002 (Δ΄ έκδοση) δεν έχουν διορθωθεί τα άκρα ολοκλήρωσης.

Οπότε, πιστεύω, ότι και το ΣΩΣΤΟ θα είναι ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ, μα και το ΛΑΘΟΣ θα είναι επίσης ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ...

Αλληλο-γραφία



Λάβαμε αρκετές επιστολές σχετικές με τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ.
Δημοσιεύουμε κάποιες από αυτές

✉ Αγαπητέ κ. Ιωσηφίδη,

σας στέλνω μία "ελαφρώς" διαφορετική λύση της άσκησης που δημοσιεύσατε στη σελ. 70 του περιοδικού "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ" και παρακαλώ να με συγχωρήσετε που –όντας γεωπόνος– μπαίνω στους αγρούς των Μαθηματικών.

Με την ευκαιρία, δεχθείτε και τα θερμά μου συγχαρητήρια για την αξιέπαινη προσπάθειά σας.

Με εκτίμηση
Κώστας Παλαχάνης
Κ. Τούμπα, Θεσσαλονίκη

Απάντηση Σ.Ε.

Αγαπητέ κ. Παλαχάνη,

η πανέμορφη επιστήμη των Μαθηματικών δεν είναι κτήμα κανενός. Ο ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ είναι ανοιχτός σε κάθε ενδιαφερόμενο. Είναι μεγάλη μας χαρά να συμμετέχετε στην προσπάθειά μας. Με το δικό σας σκεπτικό θα λέγαμε με σιγουριά ότι ο τίτλος "Μαθηματικός" σάς ταιριάζει καλύτερα από το "Γεωπόνος".

Σας ευχαριστούμε για τις ευχές σας και ευελπιστούμε στη συνέχιση της συνεργασίας μας.

✉ Αγαπητοί συνάδελφοι,

1) Προ ημερών ευκαίρεσα και διάβασα απερίσπαστος το $1^{ο}$ τεύχος του περιοδικού σας "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ"· σας αξίζουν θερμά συγχαρητήρια για το επίτευγμά σας αυτό. Θα ήταν ευχής έργον αν κάτι τέτοιο συνέβαινε σε όλα τα Παραρτήματα (ήδη, ελάχιστα, το κάνουν έντυπα ή ηλεκτρονικά).

Εκείνο που με συγκίνησε ιδιαίτερα ήταν το εννεασέλιδο αφιέρωμα στον αείμνηστο Θ. Ν. Καζαντζή. Τέτοιοι άνθρωποι όχι μόνο δεν πρέπει να ξεχνιούνται αλλά θα πρέπει το έργο τους να είναι σημείο αναφοράς. (...)

(...) Για το δεύτερο (της Β΄ Λυκείου) σας στέλνω εργασία μου σχετική μ' αυτό το θέμα.

Συνάδελφοι του «ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ» σας εύχομαι καλή επιτυχία στο έργο σας και σας συγχαίρω.

με εκτίμηση
Γιάννης Κερασαρίδης
Άλιμος, Αθήνα

Σημείωση Σ.Ε.

Η εργασία του συνάδελφου Γ. Κερασαρίδη δημοσιεύεται στη σελίδα 124 σ΄αυτό το τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ.

✉ Κο Σωτήρη Σκοτίδα, Καρδίτσα

Για την άσκηση ✶Γ17 η απάντηση στο ερώτημα: "Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)=\int_0^x \frac{10}{1+3f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$;" η απάντηση είναι ΝΑΙ.

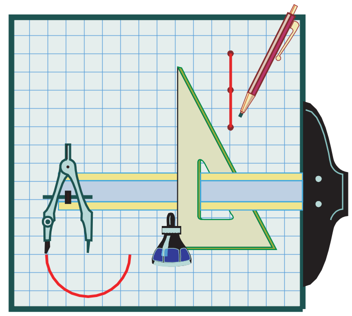
Η συνάρτηση $f(x)$, που ορίζεται ως εξής: Η εικόνα $f(x)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $y^3 + y = 10x$ (με άγνωστο το y), ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

✉ Ευχαριστούμε τους *Γιάννη Σταμέλο, Δημήτρη Ντρίζο, Βλαχάκη Νίκο* για τις ευχές τους και τα καλά τους λόγια για τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ.

✉ Ευχαριστούμε το Παράρτημα Ν. Ροδόπης της Ε.Μ.Ε. για το αφιέρωμα με τα κολακευτικά λόγια για τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ στην εφημερίδα **"Κ. Καραθεοδωρή"** του Παραρτήματος.

Με τη σειρά μας ευχόμαστε κάθε επιτυχία στους σκοπούς του Παραρτήματος Ν. Ροδόπης.

Προτεινόμενες Ασκήσεις* Μαθηματικών Α΄, Β΄, Γ΄ Λυκείου



ΕΝΗΜΕΡΩΣΗ: ΟΡΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑΣ – ΣΥΜΜΕΤΟΧΗΣ

Φίλοι αναγνώστες, συνεργάτες του περιοδικού, ο "ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ" απευθύνεται σε μαθητές Α΄, Β΄, Γ΄ Λυκείου, σε συναδέλφους, αλλά και σε κάθε ενδιαφερόμενο. Η ύλη του λοιπόν πρέπει να προσαρμόζεται σ' αυτά τα όρια.

Όλες οι λύσεις των προτεινόμενων ασκήσεων του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ, μαζί με τις εκφωνήσεις τους, θα δημοσιευτούν σ' ένα ειδικό τεύχος, που θα κυκλοφορήσει τον Μάρτιο του 2004. Στο τεύχος αυτό θα δημοσιευτούν και τα ονόματα των προτεινόντων και λυτών.

Στείλτε μας τις εργασίες σας ή τις προτεινόμενες ασκήσεις ή λύσεις των ασκήσεων που προτείναμε στη διεύθυνση ή fax ή e-mail που αναγράφονται στη σελίδα 2. Θα μας διευκολύνατε αν τα κείμενα σας είναι σε ηλεκτρονική μορφή (δισκέτες ή e-mail)

Για διευκόλυνσή μας, μη γράφετε σ' ένα φύλλο περισσότερες από μία άσκηση (μαζί με τη λύση της).

Οι εργασίες και οι ασκήσεις πρέπει να είναι, κατά το δυνατόν, πρωτότυπες. Αν έχουν δημοσιευτεί και αλλού, σας παρακαλούμε να μας το γνωρίζετε˙ αυτό δεν εμποδίζει τη δημοσίευσή τους και στο περιοδικό μας.

Σας παρακαλούμε ακόμη οι εργασίες σας να μην είναι υπερβολικά μεγάλες. Ιδανικό μέγεθος οι 3-8 σελίδες (του περιοδικού). Για τις μεγαλύτερες εργασίες η Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ προσανατολίζεται στην έκδοση ειδικού πρόσθετου τεύχους, ώστε και οι εργασίες αυτές να δουν το φως της δημοσιότητας. Επομένως, μη διστάζετε να μας στείλετε και μεγαλύτερες εργασίες για το ειδικό αυτό τεύχος.

Μη ξεχνάτε να μας γράφετε τη διεύθυνση, το τηλέφωνο και την ηλεκτρονική διεύθυνσή σας (αν υπάρχει), για να μπορούμε να επικοινωνούμε μαζί σας.

Από τη Σ.Ε. του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ

---

* *Οι ασκήσεις με αστερίσκο ✶ είναι πιο δύσκολες*

Α΄ Λυκείου

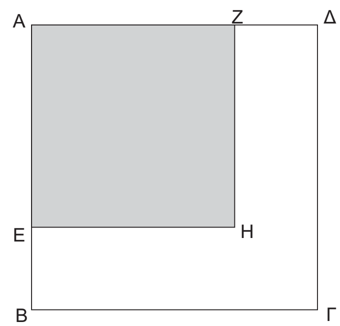
ΑΛΓΕΒΡΑ

Α16. Σε ένα ανοιχτό βιβλίο το γινόμενο των δύο σελίδων είναι 1806. Σε ποιες σελίδες είναι ανοιχτό το βιβλίο;

Κουρουμλίδου Χριστίνα, Μαθήτρια Β΄ Λυκείου, Βέροια

Α17. Από ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 20 cm αφαιρούμε ένα τετράγωνο ΑΕΗΖ. Αν το εμβαδόν του σχήματος που απομένει είναι το 51% του αρχικού τετραγώνου, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου που αποκόπτεται.

Γκαγκούσης Βασίλης, Μαθητής Γ΄ Λυκείου, Βέροια



Α18. Να γραφεί η παράσταση $5x^2 + 2y^2 - 2xy - 6x - 6y + 9$ σαν άθροισμα τετραγώνων δύο παραστάσεων της μορφής $αx + βy + γ$. Κατόπιν να βρεθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε:

$$5x^2 + 2y^2 - 2xy - 6x - 6y + 9 = 0$$

Γολιδοπούλου Εύα, Μαθηματικός, Βέροια

Α19. Υπολογίστε το άθροισμα:

$$Σ = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$$

Σκοτίδας Σωτήρης, Μαθηματικός, Καρδίτσα

Α20. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} λ^2x + (λ-1)y = x \\ 6(λ-2)x + λ^2y = 4y \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του λ:

Κοραΐδου Ελένη, Μαθηματικός, Βέροια

Α21. Να λυθεί η εξίσωση: $|λ^2x^2 - 2λx + 1| + |(λ-2)x^2 + 4λx - 3| = 0$, για τις διάφορες τιμές του λ.

Κοραΐδου Ελένη, Μαθηματικός, Βέροια

Α22. Αν $α, β > 0$ και $α + β = 1$, δείξτε ότι:

α) $\frac{1}{α} + \frac{1}{β} \geq 4$ **β)** $\left(α + \frac{1}{α}\right)^2 + \left(β + \frac{1}{β}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

Παπαδόπουλος Κώστας, Μαθηματικός, Βέροια

✶**Α23.** Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} |x-y| \le 3 \\ x+2y=4 \end{cases}$

Κοραΐδου Ελένη, Μαθηματικός, Βέροια

✶**Α24. α)** Να αποδειχθεί ότι: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Πότε ισχύει το ίσον;

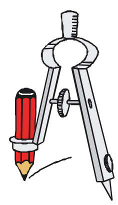
β) Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε: $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta-2\alpha-5\beta+13=0$.

Παπαδόπουλος Μανώλης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

✶**Α25.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \le 2 \\ -3x+2, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

Να λυθεί η εξίσωση: $|f(x)-1| + 2|f(x+2)+1| = 13$

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α26. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60°$. Φέρνουμε τις διχοτόμους ΒΔ και ΓΕ. Να αποδειχθεί ότι: $A\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$.

Γκαγκούση Βανέσσα, Μαθήτρια Β΄ Λυκείου, Βέροια

Α27. Τα Δ, Ε, Ζ είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ. Αν Κ, Λ, Μ είναι αντίστοιχα τα κέντρα βάρους των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΔΕ, να αποδειχτεί ότι τα τρίγωνα ΚΛΜ και ΑΖΕ είναι ίσα.

Παπαδόπουλος Μανώλης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

Α28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΙ και ΑΓΕ, καθώς και το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΚ στο ημιεπίπεδο της ΒΓ, που βρίσκεται και η κορυφή Α. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ι, Α, Ε και Κ είναι κορυφές παραλληλογράμμου..

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

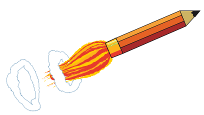
Α29. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ΒΓ. Αν οι εγγεγραμμένοι κύκλοι στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ εφάπτονται με την ΑΔ στο ίδιο σημείο, να αποδειχθεί ότι το Δ είναι το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ με τη πλευρά ΒΓ.

Ιωσηφίδης Γεώργιος, Μαθηματικός, Βέροια

Α30. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι κέντρου Ο και μια ευθεία που δεν διέρχεται από το Ο και τέμνει τους δύο κύκλους κατά σειρά στα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Οι εφαπτόμενες των κύκλων στα Α και Β τέμνονται στο Ε, ενώ οι εφαπτόμενες στα Γ και Δ τέμνονται στο Ζ. Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Ιωσηφίδης Γεώργιος, Μαθηματικός, Βέροια.

Β΄ Λυκείου



ΑΛΓΕΒΡΑ

Β27. Να λυθεί η εξίσωση: $ημx^0 = ημx^{rad}$

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

Β28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3α·συν2x – β$, $α > 0$, $β \in \mathbb{R}$.

Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη τιμή το 10 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{π}{4}, 5\right)$,

α) να βρείτε τους α, β
β) να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.
γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 3T]$, όπου T η περίοδος τηςσυνάρτησης f.

Μπαζούκης Γ. – Στογιαννόπουλος Α., Μαθηματικοί, Βέροια

Β29. Αν η συνάρτηση $f(x)= α·ημ3x + β$, $α > 0$, $β < 0$ έχει μέγιστο το 9 και η συνάρτηση $g(x) = α·συν3x – 2β$ έχει ελάχιστο το $–5$,

α) να βρείτε τους α, β
β) να λυθεί η εξίσωση $f(x) = g(x) + 3β$

Μπαζούκης Γ. – Στογιαννόπουλος Α., Μαθηματικοί, Βέροια

Β30. Αν η συνάρτηση $f(x) = (α – 2)·συν\frac{βxπ}{3}$, $α < 2$, $β > 0$, έχει μέγιστο το 6 και περίοδο $T = \frac{1}{6}$, να βρείτε τους α, β.

Μπαζούκης Γ. – Στογιαννόπουλος Α., Μαθηματικοί, Βέροια

Β31. Αν συνx = συνy και ημx = –ημy, να δειχτεί ότι:

$$ημ(1994x) + ημ(1994y) = 0$$

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

Β32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2συν^2\frac{x}{2} + συν2x$, $x \in (0, 2π)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = συνx + 2συν^2x$

β) Να βρείτε τα $x \in (0, 2π)$ για τα οποία είναι: $f(x) = 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(π - x) + f\left(\frac{π}{2} - x\right) = 2$, $x \in (0, 2π)$.

Μπαζούκης Γ. – Στογιαννόπουλος Α., Μαθηματικοί, Βέροια

Β33. Να λυθεί η εξίσωση: $ημ^2x + \left(2 - \sqrt{2}\right)συν^2\frac{x}{2} = 2 - \sqrt{2}$, $x \in (0, 2π)$

Μπαζούκης Γ. – Στογιαννόπουλος Α., Μαθηματικοί, Βέροια

Β34. Αν α, β, 2α, 2β $\neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$ και $εφα \cdot εφβ = \frac{1}{6}$, $ημα \cdot ημβ = \frac{\sqrt{2}}{10}$, να βρεθεί το συν(α + β) και κατόπιν να δειχτεί ότι:

α) $εφ2α \cdot εφ2β = 1$

β) $ημ4α = ημ4β$

Παπαδόπουλος Κώστας, Μαθηματικός, Βέροια

Β35. Να λυθεί η εξίσωση:

$$2\left(συνx \cdot συν\frac{19π}{10} + ημx \cdot ημ\frac{7π}{5}\right) = \sqrt{3} \cdot συν\frac{π}{5} + ημ\frac{π}{5}$$

Μπαζούκης Γ. – Στογιαννόπουλος Α., Μαθηματικοί, Βέροια

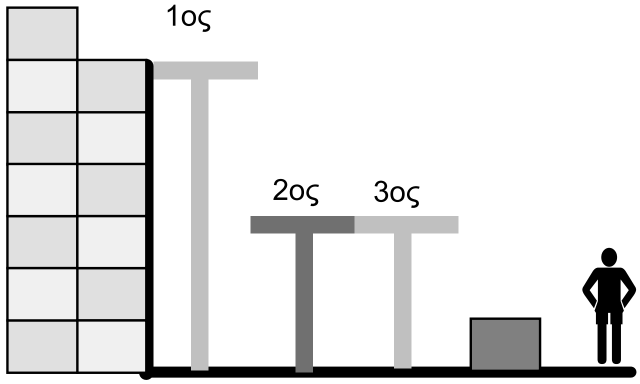
Β36. Αν x, $x + y \neq κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$ και $ημy = 2ημ(2x + y)$, να αποδειχτεί ότι:

$$\frac{εφ(x + y)}{εφx} = -3$$

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

✶Β37. Το Πρόβλημα των ανελκυστήρων

Ένας εργάτης προσπαθεί να μεταφέρει ένα κιβώτιο από το έδαφος σε μια θέση που βρίσκεται 4 μέτρα ψηλά. Για να τα καταφέρει πρέπει να χρησιμοποιήσει τους τρεις ανελκυστήρες, (όπως φαίνεται στο σχήμα). Το κιβώτιο μπορεί μόνο να το σύρει γι' αυτό και οι ανελκυστήρες πρέπει να βρίσκονται πάντα στο ίδιο επίπεδο με αυτόν. Ο χρόνος που χρειάζεται για να το σύρει θεωρείται αμελητέος.



Οι ανελκυστήρες κινούνται πάνω και κάτω ώστε η απόστασή τους από το έδαφος να δίνεται από τις συναρτήσεις:

1ος ανελκυστήρας: $y_1 = 2συνx + 2$

2ος ανελκυστήρας: $y_2 = 2ημx + 2$

3ος ανελκυστήρας: $y_3 = 2ημ2x + 2$

όπου το x εκφράζει λεπτά (min) και τα y_1,y_2,y_3 απόσταση από το έδαφος σε μέτρα (m).

α) Να δειχτεί ότι δεν θα βρεθούν ποτέ και οι τρεις στο ίδιο ύψος

β) Μετά από πόσα λεπτά θα ανέβει ο εργάτης στον 3ο ανελκυστήρα;

γ) Πόσα λεπτά θα παραμείνει σε αυτόν μέχρι να ανέβει στον 2ο;

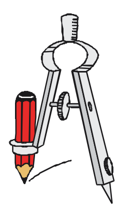
δ) Πόσα λεπτά θα παραμείνει σε αυτόν μέχρι να ανέβει στον 1ο;

ε) Πόσο χρόνο θα χρειαστεί συνολικά ο εργάτης για να μεταφέρει το κιβώτιο από το έδαφος στην τελική του θέση;

Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια

Β38. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει το ύψος ΑΔ στο Ι και ο κύκλος διαμέτρου ΑΓ τέμνει το ύψος ΒΕ στο Λ. Να αποδειχθεί ότι ΓΙ = ΓΛ.

Ιωσηφίδης Γεώργιος, Μαθηματικός, Βέροια



ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β39. Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ οι προεκτάσεις των ΑΒ, ΓΔ τέμνονται προς το μέρος της ΒΓ στο Ε και ισχύουν: (ΒΓΕ) = 20, $\frac{ΒΕ}{ΑΒ} = 2$, $\frac{ΓΕ}{ΔΓ} = \frac{3}{2}$.

α) Αποδείξτε ότι (ΒΓΕ) = $\frac{2}{5}$(ΑΕΔ)

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

γ) Αν, επιπλέον, $\hat{Α} = Β\hat{Γ}Ε = 90°$, να αποδείξετε ότι:

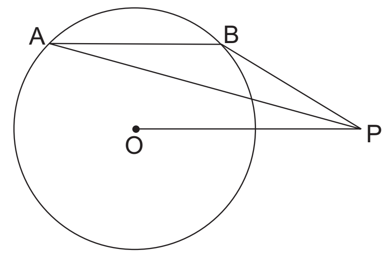
i) $AE^2 = \frac{9}{10}E\Delta^2$ **ii)** $A\Delta = AB$

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Β40. Έστω κύκλος (O, r) και μια χορδή AB. Αν σημείο P βρίσκεται εκτός του κύκλου τέτοιο, ώστε OP // AB, να αποδείξετε ότι:

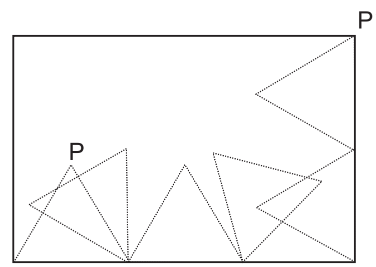
α) $PA^2 + PB^2$ = σταθερό,

β) το εμβαδόν του τριγώνου PAB γίνεται μέγιστο όταν η χορδή AB είναι $r\sqrt{2}$.



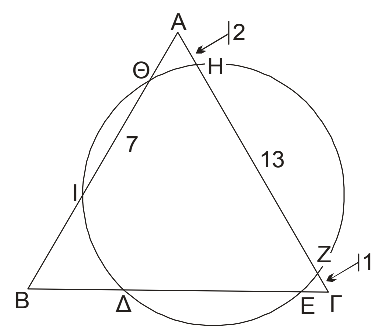
Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

Β41. Έστω ορθογώνιο με μήκη πλευρών 2 και 3 και ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1. Το τρίγωνο περιστρέφεται μέσα στο ορθογώνιο μέχρι να φτάσει στην τελική του θέση πάνω δεξιά. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής που διαγράφει το σημείο από τη θέση P μέχρι τη θέση P΄.



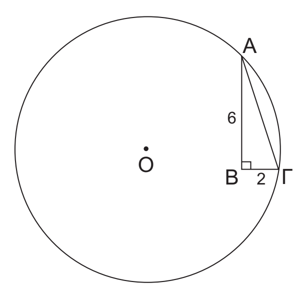
Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

Β42. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι ισόπλευρο, να βρείτε το μήκος της χορδής ΔΕ.



Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

Β43. Έστω ο κύκλος $\left(O, \sqrt{50}\right)$ και τα τμήματα: AB = 6 και ΒΓ = 2. Να υπολογίσετε το μήκος του OB.



Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

✶**Β44.** Δίνονται τρεις ομόκεντροι κύκλοι (Κ, ρ), (Κ, 2ρ) και (Κ, 3ρ). Από σημείο Ρ του κύκλου (Κ, 3ρ) φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΡΑ και ΡΒ των (Κ, ρ) και (Κ, 2ρ) αντίστοιχα προς το ίδιο μέρος της ΡΚ.

α) Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΑΒ ως συνάρτηση του ρ.

β) Υπολογίστε το (ΑΒ) ως συνάρτηση του ρ.

γ) Αποδείξτε ότι $(ΚΑΒ) = \frac{1}{3}(ΚΑ)\cdot(ΑΒ)$

Ιωσηφίδης Γεώργιος, Μαθηματικός, Βέροια

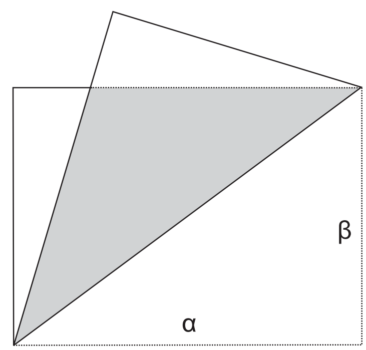
✶**Β45.** Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ δίνεται σημείο Κ. Οι ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ τέμνουν τις απέναντι πλευρές στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα.

Αν $\frac{ΑΚ}{ΚΔ} = \frac{ΒΚ}{ΚΕ} = \frac{ΓΚ}{ΚΖ}$, να αποδειχθεί ότι το Κ είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

Ιωσηφίδης Γεώργιος, Μαθηματικός, Βέροια.

✶**Β46.** Έστω ορθογώνιο με διαστάσεις α και β με: α > β. Διπλώνουμε το ορθογώνιο κατά μήκος της διαγωνίου. Να υπολογίσετε συναρτήσει των α και β το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου.

Απλακίδης Γιάννης,
Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου:
"Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

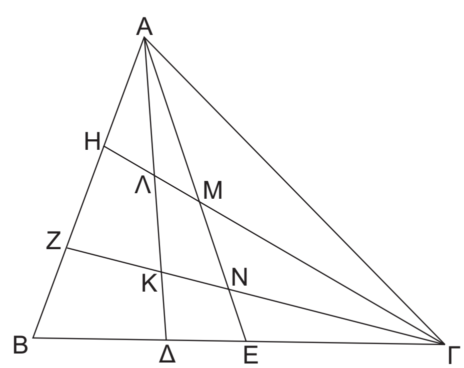


✶**Β47.** Στο διπλανό τρίγωνο είναι:

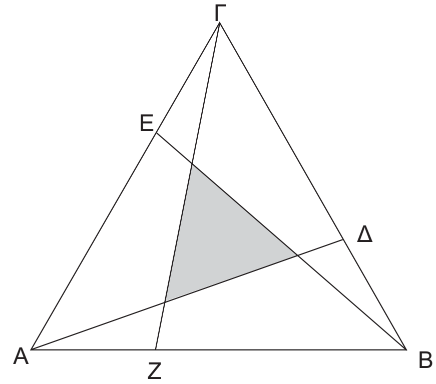
$ΖΗ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΔΕ = \frac{1}{3}ΒΓ$.

Αν είναι: (ΑΛΜ) + (ΚΝΕΔ) = β και (ΓΝΜ) + (ΚΛΗΖ) = α, να υπολογίσετε την τιμή του α – β.

Απλακίδης Γιάννης,
Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου:
"Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;""

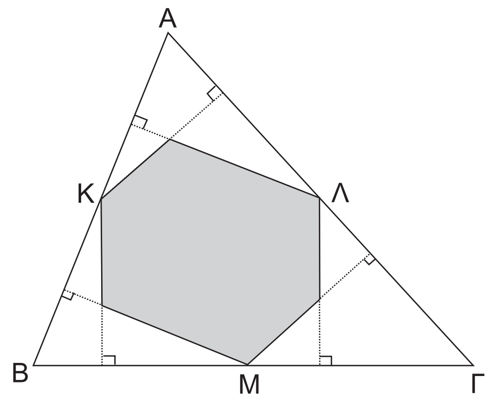


✶**Β48.** Αν στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος είναι:
$\frac{ΒΔ}{ΒΓ}=\frac{1}{3}, \frac{ΓΕ}{ΓΑ}=\frac{1}{3}$ και $\frac{ΑΖ}{ΑΒ}=\frac{1}{3}$,
να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου τριγώνου.



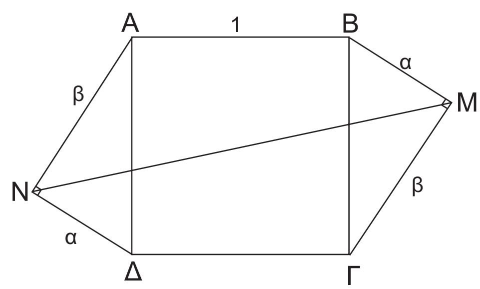
Απλακίδης Γιάννης,
Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου:
"Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

✶**Β49.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα από τα μέσα προς τις άλλες δύο πλευρές του τριγώνου τέμνονται και σχηματίζουν ένα εξάγωνο. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του εξαγώνου είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου.



Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

✶**Β50.** Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 1 και δύο ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΜ και ΑΔΝ, που γράφονται εξωτερικά του τετραγώνου. Αν είναι: ΜΒ = ΝΔ = α και ΜΓ = ΑΝ = β, να υπολογίσετε το ΜΝ συναρτήσει των α και β.



Απλακίδης Γιάννης, Μαθηματικός, Βέροια
Από το βιβλίο του ιδίου: "Είναι άραγε νεκρός ο Ευκλείδης;"

✶**Β51.** Αν Κ, Λ, Μ, Ν είναι τα κέντρα των τετραγώνων που κατασκευάζονται, με πλευρές τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ενός τυχαίου τετραπλεύρου, εξωτερικά αυτού, να δειχθεί ότι το ΚΜ είναι κάθετο και ίσο προς το ΛΝ.

Δεργιαδές Νικόλαος, Μαθηματικός, Θεσσαλονίκη

✶**B52.** Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ το τυχαίο εσωτερικό του σημείο Ο προβάλλεται πάνω στις ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Α΄, Β΄, Γ΄. Να δειχθεί η παρακάτω ισότητα εμβαδών :

$$(OBA') + (O\Gamma B') + (OA\Gamma') = (OA'\Gamma) + (OB'A) + (O\Gamma'B)$$

Δεργιαδές Νικόλαος, Πούλος Ανδρέας, Μαθηματικοί, Θεσσαλονίκη

✶**B53.** Σε κανονικό πεντάγωνο $A_1A_2A_3A_4A_5$ οι ορθές προβολές, ενός τυχαίου σημείου Ο στο εσωτερικό του πενταγώνου, πάνω στις πλευρές είναι τα εσωτερικά σημεία των πλευρών M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Να δειχθεί η ισότητα των εμβαδών:

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$$

όπου $E_\nu = (OA_\nu M_\nu)$ και $F_\nu = (OM_\nu A_{\nu+1})$, με $A_6 \equiv A_1$

Δεργιαδές Νικόλαος, Μαθηματικός, Θεσσαλονίκη

✶**B54.** Σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) δείξτε ότι: $|A\Delta - B\Gamma| \le |A\Gamma - B\Delta|$.

Σκοτίδας Σωτήρης, Μαθηματικός, Καρδίτσα

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

Οι επόμενες έξι ασκήσεις του Λεωνίδα Ιωσηφίδη, προτείνεται να αντιμετωπιστούν ως εφαρμογές των ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ (βλέπε σχετικό άρθρο σ' αυτό το τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ)

✶**B55.** Για οποιοδήποτε τρίγωνο, να δειχτεί ότι: $\rho(4R + \rho) \ge \sqrt{3}E$,

όπου: ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και Ε το εμβαδόν του τριγώνου. Πότε ισχύει η ισότητα;

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**B56.** Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Να δειχτεί ότι: $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} \ge \frac{1}{R^2}$.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**B57.** Να δειχτεί ότι: $(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) + 5\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \ge 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2$,

για κάθε α, β, $\gamma \in \mathbb{R}^+$

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**B58.** Σε κάθε τρίγωνο, να αποδειχτεί ότι: $\frac{1}{3} \le \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2} < \frac{1}{2}$

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**Β59.** Σε κάθε τρίγωνο να αποδείξετε ότι: $\tau \geq 3\rho\sqrt{3}$, όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου.

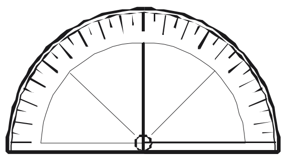
Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶**Β60.** Αν τ η ημιπερίμετρος τριγώνου, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου και ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, να δείξετε ότι:

$$\tau^2 \geq 3\rho^2 + 12R\rho$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.



ΜΑΘ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Β61. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν:

$$\vec{\alpha} \neq \vec{0},\ \ \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} \ \text{ και } \ \left|\vec{\beta}\right| = \frac{1}{2},$$

να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} = 4\vec{\beta}$.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Β62. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ έχουμε : $|\vec{\alpha}| = 2,\ \left|\vec{\beta}\right| = 3,\ \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 60^\circ$.

Υπολογίστε:

α) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$

β) τη γωνία $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Β63. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

α) Υπολογίστε το $\left|\vec{\beta}\right|$ έτσι ώστε $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \perp \vec{\alpha}$.

β) Για την τιμή του $\left|\vec{\beta}\right|$ που βρήκατε, υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΟΑΓΒ, όπου $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

✶**Β64.** Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνεται τετράγωνο πλευράς 1 Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν το πολύ δύο σημεία εσωτερικά του τετραγώνου με ακέραιες συντεταγμένες.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

Γ΄ Λυκείου

ΜΑΘ. ΓΕΝ. ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Γ31. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f πραγματικής μεταβλητής x, με τύπο: $f(x)=1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x+1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x)=-1$.

γ) Συμβολίζουμε με g τη συνάρτηση, η οποία είναι η δύο χιλιάδες τέταρτη παράγωγος της συνάρτησης f.

i. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης g.

ii. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g, στο σημείο της $(0,\ g(0))$.

Βλαχάκης Νίκος, Μαθητής Γ΄ Λυκείου, Αθήνα

Γ32. Ένας ασθενής με γρίπη λαμβάνει ένα αντιπυρετικό χάπι τη χρονική στιγμή t = 0. Η θερμοκρασία του ασθενούς (σε °C) μετά τη λήψη του χαπιού δίνεται από τη συνάρτηση $\theta(t) = 40 - \dfrac{c\cdot t}{1+t^2}$, $t\in[0,\ 6]$, όπου t ο χρόνος σε ώρες και c μία πραγματική σταθερά. Μετά την πάροδο 3 ωρών, η θερμοκρασία του ασθενούς έχει πέσει στους 37,6° C.

α) Αποδείξτε ότι: c = 8.

β) Ποια ήταν η θερμοκρασία του ασθενούς μία (1) ώρα μετά τη λήψη του χαπιού;

γ) Αποδείξτε ότι η θερμοκρασία που βρήκατε στο ερώτημα (β) ήταν η κατώτερη δυνατή, που μπορούσε να επιτύχει η λήψη του χαπιού.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Γ33. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.

γ) Να υπολογίσετε τα: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

δ) Μπορεί η συνάρτηση f να οριστεί στο σημείο $x_0 = 2$, ώστε να είναι συνεχής στο σημείο αυτό;

ε) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Τσιπρόπουλος Αντώνης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας

Γ34. Για τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_{10}$ ισχύει: $\overline{x} = 4$ και $S_x = 1$.
Επίσης, για τις παρατηρήσεις $y_1, y_2, ..., y_{20}$ ισχύει: $\overline{y} = 7$ και $S_y = 2$.
Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση όλων των παρατηρήσεων.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

Γ35. Η μέση τιμή ενός δείγματος ν παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι 20. Αν προσθέσουμε στο δείγμα ακόμη μια παρατήρηση με τιμή ίση με x_ν, η μέση τιμή του νέου δείγματος είναι 18, ενώ αν από τις αρχικές παρατηρήσεις αφαιρέσουμε την παρατήρηση με τιμή x_ν, η νέα μέση τιμή είναι 23. Να βρεθεί το μέγεθος του αρχικού δείγματος ν, καθώς και η τιμή x_ν.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

Γ36. Αν στις παρατηρήσεις ενός δείγματος προσθέσουμε μια νέα παρατήρηση, η μέση τιμή του δείγματος αυξάνει. Να αποδειχθεί ότι η τιμή της νέας παρατήρησης είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή του αρχικού δείγματος.

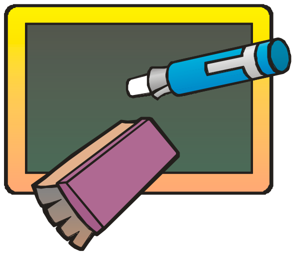
Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια

Γ37. Η μέση τιμή μιας μεταβλητής είναι 8. Κατά πόσο πρέπει να αυξήσουμε όλες τιμές της ώστε ο νέος συντελεστής μεταβολής να γίνει το μισό του αρχικού;

Ιωσηφίδης Γεώργιος, Μαθηματικός, Βέροια.

✶Γ38. Η μέση τιμή ενός δείγματος 10 παρατηρήσεων που λαμβάνονται από το σύνολο {3, 5, 7} είναι 5,6 και οι τιμές που είναι ίσες με 3 είναι περισσότερες από εκείνες που είναι ίσες με 5. Να βρεθεί η τυπική απόκλιση του δείγματος.

Ιωσηφίδης Νίκος, Μαθηματικός, Βέροια



ΜΑΘ. ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ39. Έστω $z_0 \neq 0$ σταθερός μιγαδικός. Για τον μιγαδικό z_1 ισχύει:

$$|z_0 - z_1| = |z_1|$$

Αν για τον μιγαδικό z ισχύει $z \cdot z_1 = -1$, να βρεθεί ο γ. τ. της εικόνας του z.

Σκοτίδας Σωτήρης, Μαθηματικός, Καρδίτσα

Γ40. Αν για τους μιγαδικούς: $z_1, z_2, ..., z_\nu$ ισχύει: $|z_1| = |z_2 = ... = |z_\nu| = 1$, να δειχτεί ότι: $(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu) \cdot \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_\nu}\right) \leq \nu^2$.

Παπαδόπουλος Κώστας, Μαθηματικός, Βέροια

Γ41. Να βρεθεί συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) + x \cdot f(1 - x) = x^2$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παπαδόπουλος Κώστας, Μαθηματικός, Βέροια

Γ42. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει: $2(f(x))^3 + f(x) = 3x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $f(x^2 + x - 1) < 1$.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

Γ43. Για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, ισχύει: $f(\lambda x) > f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, για κάθε $x > 0$ και για κάθε $\lambda > 1$. Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

Γ44. Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z \neq 0$ με $z^3 = \bar{z}$.

α) Για κάθε τέτοιο μιγαδικό, αποδείξτε ότι:

i) $|z| = 1$ **ii)** ο αριθμός $w = z^3 + \frac{1}{z^3}$ είναι πραγματικός.

β) Υπολογίστε τους $z \neq 0$ με $z^3 = \bar{z}$

γ) Υπολογίστε το άθροισμα: $S = z + z^2 + ... + z^{2004}$ και το γινόμενο: $P = z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot ... \cdot z^{2004}$ για κάθε τέτοιο μιγαδικό.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

Γ45. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\alpha - 2)x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha - 3 = 0$, να έχει δύο ρίζες στο $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, που το πραγματικό τους μέρος να είναι αρνητικό.

Τσιπρόπουλος Αντώνης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας.

Γ46. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^{2005} + 5x^{2003} + 12x + 1$.

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1–1".

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2x^{2005} + 5x^{2003} + 12x = 19$ (1)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $(f \circ f)(x) \leq 20$ (2)

Τσιπρόπουλος Αντώνης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας.

Γ47. Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και $w = \dfrac{z+4}{z+2}$.

α) Να γράψετε τον μιγαδικό αριθμό w στη μορφή α + βi.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει: $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$.

Τσιπρόπουλος Αντώνης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας.
Μαθηματικά (Άλγεβρα) Γ΄ Λυκείου, Αντ. Τσιπρόπουλου, σελ. 235

✶**Γ48.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(\eta\mu\dfrac{\pi}{12}\right)^x + \left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{12}\right)^x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

β) Να λυθεί ως προς x η εξίσωση:

$$\left(\eta\mu\frac{\pi}{12}\right)^{x^2} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right)^{x} + \left(\eta\mu\frac{\pi}{12}\right)^{x} \cdot \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}\right)^{x^2} = 4^{-x}$$

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

✶**Γ49.** Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ισχύει:

$$f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δειχθεί ότι η f είναι 1–1.

β) Να βρεθεί το $f(3)$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f\left(1+2f\left(x^2+x+1\right)\right)=f\left(1+f\left(5\right)\right)-4$$

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

✶Γ50. Έστω συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 5) και Β(3, –1),

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f.

β) Να λυθεί η ανίσωση: $f^{-1}\left(-2+f^{-1}\left(x^2+x+3\right)\right)>3$

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

✶Γ51. Για τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει: $f(x + y) = f(x) + f(y) - \alpha$,

για κάθε x, $y\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ (σταθερό).

α) Βρείτε το $f(0)$.

β) Αποδείξτε ότι: $f(x - y) = f(x) - f(y) + \alpha$, για κάθε x, $y\in\mathbb{R}$.

γ) Αποδείξτε ότι: $f(\nu x) = \nu f(x) - (\nu - 1)\alpha$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ και $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η f είναι 1–1 και ισχύει: $f^{-1}(x + y - \alpha) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$, για κάθε x, $y\in f(\mathbb{R})$.

ε) Αν για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > \alpha$, να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να λυθεί η ανίσωση: $2f(x^2) < f(3x - 1) + \alpha$.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

✶Γ52. Για τη συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ισχύει: $f(x) + 2e^{f(x)} = x + 2$,

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = x + 2e^x$.

γ) Να βρείτε το $f(0)$ και το πρόσημο της f.

Ζανταρίδης Νίκος, Μαθηματικός, Έδεσσα

✶Γ53. Δίνεται το σύνολο Α = {1, 2, ..., n}, $n \neq 1$. Σχηματίζουμε όλους τους μιγαδικούς z = α + βi, με α, $\beta \in A$. Αποδείξτε πως διαλέγοντας $\frac{n(n+1)}{2}+1$ από τους παραπάνω μιγαδικούς, θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο από αυτούς που θα έχουν ίσα μέτρα.

Ιωσηφίδης Λεωνίδας, Φοιτητής Μαθηματικών Α.Π.Θ.

✶Γ54. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να λυθεί η εξίσωση $z^2 - 3|z| + \alpha^2 = 0$, $\alpha > 0$.

Τσιπρόπουλος Αντώνης, Μαθηματικός, Μελίκη Ημαθίας.
Εισαγωγικές εξετάσεις Φυσικομαθηματικής Σχολής 1968
Μαθηματικά (Άλγεβρα) Γ΄ Λυκείου, Αντ. Τσιπρόπουλου, σελ. 273

✶Γ55. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z) = |iz-1|$, $z \in \mathbb{C}$.

α) Αν $f(z) = f(\bar{z})$, να δειχτεί ότι ο z είναι πραγματικός.

β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, με $f(z) = 3$,

γ) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί με $f(z_1) = f(z_2) = 3$, αποδείξτε ότι:
$$|z_1 - z_2| \leq 6$$

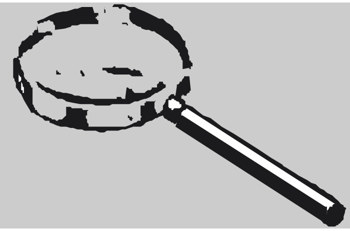
δ) Αν $w = \sqrt{5} + i$, να βρείτε τον $z \in \mathbb{C}$, με $f(z) = 3$ και $|w - z| = 6$.

Θαρραλίδης Λεωνίδας, Μαθηματικός, Καστοριά

✶Γ56. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που να είναι "1-1" και για την οποία να ισχύει: $f(x^2) - [f(x)]^2 \geq \frac{1}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παπαδόπουλος Κώστας, Μαθηματικός, Βέροια

Παροράματα 1ου τεύχους του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ



Έχουμε εντοπίσει τα παρακάτω παροράματα στο 1ο τεύχος του ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ. Ζητώντας συγγνώμη από τους αναγνώστες, τα επισημαίνουμε, ώστε να γίνουν οι απαραίτητες διορθώσεις.

Σελ. 46, αντί: **log** να γραφεί: **ln** (*4 φορές*)

Σελ. 48 αράδα 1^{-}, αντί: $\boldsymbol{\lambda = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}|^2}\cdot\vec{\alpha}}$ να γραφεί: $\boldsymbol{\lambda = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{u}}{|\vec{\alpha}|^2}}$

Σελ. 70 αρ. 5^{-}, αντί: ... **τρίγωνα BCI,** ... να γραφεί: ... **τρίγωνα DCI,** ...

Σελ. 72 αρ. 3^{-}, αντί: $\frac{\beta}{2}$ να γραφεί: $\frac{R}{2}$

Σελ. 91 ασκ. Γ10, 6^{-}, αντί: $\mathbf{i}(\mathbf{z}+\bar{\mathbf{z}})$ να γραφεί: $\mathbf{i}(\mathbf{z}-\bar{\mathbf{z}})$

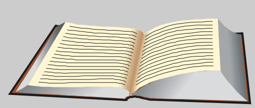
Σελ. 92 ασκ. Γ12, αντί: $\ldots(\alpha\delta-\beta\gamma)\int f(t)\,dt$ να γραφεί:

$$\ldots(\alpha\delta-\beta\gamma)\int \frac{f(t)}{(\alpha-\gamma t)^2}\,dt,\ \text{όπου } t=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

Σελ. 94 ασκ. *Γ21, αντί: για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ να γραφεί: για κάθε $\mathbf{x > 0}$

Σελ. 95 ασκ. *Γ26, αντί: **g(1 – x) + g(1 – x)** να γραφεί: **g(1 – x) + g(1 + x)**

Από τη Συντακτική επιτροπή



Συνάδελφοι,
διαδίδετε και προωθείτε τον ΑΠΟΛΛΩΝΙΟ στους συναδέλφους και στους μαθητές σας.

Απολλώνιος

Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Ν. Ημαθίας
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Περιεχόμενα 1ου τεύχους

Απρίλιος 2003