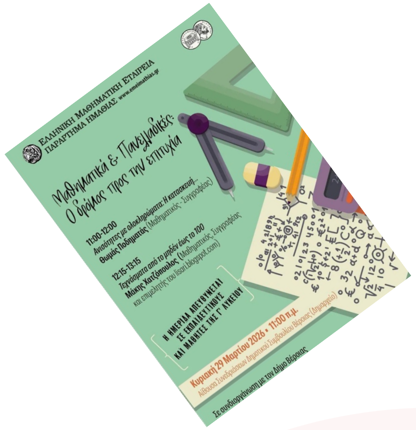

Μαθηματικά και Πανελλαδικές Εξετάσεις

Τεχνάσματα από το μηδέν έως το εκατό!

Επιμέλεια: Μάκης Χατζόπουλος

Ε.Μ.Ε. Παράρτημα Ημαθίας – Συνδιοργάνωση με το Δήμο Βέροιας

Εισαγωγή

Τελευταίες εβδομάδες πριν τις Πανελλαδικές εξετάσεις... Ο στόχος δεν είναι να τα δούμε όλα!

1. **Συμπυκνωμένη πληροφορία:** Προσφορά μέγιστης πληροφόρησης σε λίγο χρόνο, με σκοπό την ουσιαστική ωφέλεια για τον υποψήφιο.
2. **Διζωνική ομιλία:** Προσαρμοσμένη σαν τον κλιματισμό αυτοκινήτου, ώστε να λάβει ο κάθε υποψήφιος ακριβώς αυτό που του αρμόζει.
3. **Για όλα τα επίπεδα:** Ξεχωριστές οδηγίες για μαθητές που προσπαθούν για τη βάση και για εκείνους που στοχεύουν το άριστα.
4. **Ρεαλιστικές συμβουλές:** Ορθολογικές οδηγίες και ρεαλιστικό πλάνο, αποφεύγοντας ακραίες ιδέες που φέρνουν αντίθετα αποτελέσματα.
5. **Από το μηδέν... έως το εκατό:** Ένας οδηγός επιτυχίας που, με σωστή χρήση, μπορεί να οδηγήσει τον υποψήφιο στο απόλυτο 100!

Τέχνασμα 1ο

Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

Βασικός Στόχος

Ό,τι μαθητής και να είσαι **θα περάσεις από εδώ**!
Θες τη βάση; Θες το άριστα; Δεν γίνεται να μη διαβάσεις τη θεωρία!

Όσες μονάδες είναι το **Δ' θέμα**, τόσες μονάδες είναι και το **Α' θέμα**!

"Άρα ποιος ο λόγος να κυνηγάς το Δ4 όταν το ερώτημα Α4 έχει 5 ερωτήσεις «Σωστό-Λάθος» και δίνει 10 μονάδες;"

ΜΟΝΑΔΕΣ 0 ΕΩΣ 25

Τέχνασμα 1ο: Θεωρία Σχολικού Βιβλίου

Μονάδες από 0 έως 25: Ό,τι μαθητής και να είσαι θα περάσεις από εδώ!

1. Στοχεύεις τουλάχιστον για τη **βάση**; Δεν γίνεται να μη διαβάσεις θεωρία!

2. Προσπαθείς για το **άριστα**; Δεν γίνεται να μη γράψεις θεωρίας!

3. Όσες μονάδες είναι το Δ θέμα, **τόσες μονάδες είναι και το Α θέμα!**

4. Άρα ποιος ο λόγος να κυνηγάς το ερώτημα **Δ4** που ενίοτε είναι αρκετά απαιτητικό όταν το ερώτημα **Α4** έχει πέντε ερωτήσεις τύπου «Σωστό – Λάθος» και λαμβάνει **δέκα μονάδες**;

Τέχνασμα 2ο

Βασικές Γνώσεις από Α' - Β' Λυκείου

ΜΟΝΑΔΕΣ 25 ΕΩΣ 50

Περιεχόμενο Ενότητας

Ανισώσεις, Ανισότητες, Τύποι και Γραφικές Παραστάσεις.

Απαραίτητα θεμέλια για να **αποφευχθούν λάθη**.

"Ένας υποψήφιος πρέπει να λύσει την τελευταία εβδομάδα δύο τουλάχιστον ασκήσεις από το σχολικό βιβλίο για την κάθε έννοια."

Τέχνασμα 2ο: Βασικές γνώσεις (Μέρος 1/3)

(Α) Ανισώσεις

1. $-2x>6,\ x^2>1,\ x^3>1,\ x^3>-8,\ x^2>4x,\ x^2-5x+6>0,\ x^{20}(x-1)^{13}(4x^2-4x+1)>0$
2. $\dfrac{2x}{x-1}>0,\ \dfrac{2x}{x-1}>1,\ e^x>1,\ e^x>2,\ \ln x>1,\ \ln x>0,\ \sqrt{x}>x,\ |x|>1,\ |2x-1|\le 3$
3. $x^3-2x^2-x+2>0$

(Β) Ανισότητες

4. $e^x \ge x+1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$
5. $\ln x \le x-1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$
6. $|\eta\mu x| \le |x|$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$
7. $|\eta\mu x|\le 1$ και $|\sigma\upsilon\nu x|\le 1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}$ και $x=\kappa\pi$ αντίστοιχα.
8. $x^{2\nu}\ge 0$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$
9. $e^{x^2}\ge 1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$
10. $x+\dfrac{1}{x}\ge 2$ για κάθε $x>0$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$
11. $\alpha^2+\beta^2\ge 2\alpha\beta$ η ισότητα ισχύει μόνο για $\alpha=\beta$

(Γ) Γραφικές Παραστάσεις

$f(x)=\alpha x+\beta$, $f(x)=|x|$, $f(x)=\alpha x^2$, $f(x)=\alpha x^3$

$f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, $f(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$, $f(x)=\eta\mu x$

$f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $f(x)=\alpha^x$, $f(x)=\ln x$

(Δ) Τιμές

$\eta\mu 0,\ \eta\mu\dfrac{\pi}{6},\ \eta\mu\dfrac{\pi}{4},\ \eta\mu\dfrac{\pi}{3},\ \eta\mu\dfrac{\pi}{2},\ \eta\mu\pi,\ \eta\mu\dfrac{3\pi}{2},\ \eta\mu 2\pi$

$\sigma\upsilon\nu 0,\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6},\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4},\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3},\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2},\ \sigma\upsilon\nu\pi,\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{2},\ \sigma\upsilon\nu 2\pi$

$\varepsilon\varphi 0,\ \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{6},\ \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4},\ \varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{3},\ \varepsilon\varphi\dfrac{3\pi}{4},\ \varepsilon\varphi\pi$

$e^0,\ e^{\ln 2},\ \ln e,\ \ln 1,\ \ln e^2$

Τέχνασμα 2ο: Βασικές Γνώσεις (Μέρος 2/3)

= (Ε) Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση

$$(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2),\ \text{όπου}\ x_1,x_2\ \text{οι ρίζες του τριωνύμου}$$

$$\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x=1\Leftrightarrow\eta\mu^2x=1-\sigma\upsilon\nu^2x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^2x=1-\eta\mu^2x$$

$$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x},\quad \sigma\varphi x=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\qquad \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2x}=\sigma\upsilon\nu^2x$$

X¹ (ΣΤ) Δυνάμεις – ρίζες

$$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}},\alpha\neq0\qquad \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}},\alpha>0,\ \nu>1,\ \mu\in\mathbb{Z}$$

$$\alpha^{\beta}=e^{\beta\ln\alpha},\ \alpha>0\ \text{και}\ e^{\ln2}=2$$

(Ζ) Γεωμετρία

30) Πυθαγόρειο Θεώρημα

31) Ομοιότητα τριγώνων, Ισότητα τριγώνων

32) Σχέσεις γωνιών

33) Τύποι Εμβαδών και περιμέτρων

34) Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου, παραλληλόγραμμα, τραπέζια

Τέχνασμα 2ο: (Η) Λίστα 41 Εννοιών για Επανάληψη

Συναρτήσεις

Ορισμός & Ισότητα: Πεδίο ορισμού και ισότητα συναρτήσεων.

Πράξεις & Σύνθεση: Άλγεβρα και σύνθεση συναρτήσεων.

Γραφική Παράσταση: Σχεδιασμός και μελέτη ιδιοτήτων.

Αντίστροφη: Συνάρτηση 1-1 και Εύρεση Αντίστροφης.

Όρια & Συνέχεια

Όρια: Μορφές $0/0$, $\alpha/0$, όρια στο άπειρο.

Συνέχεια: Ορισμός και μελέτη συνέχειας συνάρτησης.

Θεώρημα Bolzano: Εφαρμογές και άμεσες συνέπειες.

Διαφορικός Λογισμός

Παράγωγος: Ορισμός, κανόνες παραγώγισης, εφαπτομένη & ρυθμός μεταβολής.

Θεωρήματα: Rolle, Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.), Fermat.

Μελέτη: Μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, L'Hospital.

Γραφική: Ασύμπτωτες & πλήρης μελέτη συνάρτησης.

Ολοκληρωτικός Λογισμός

Ολοκλήρωμα: Αρχική συνάρτηση & Ορισμένο ολοκλήρωμα.

Τεχνικές: Θ.Θ.Ο.Λ., παραγοντική, αλλαγή μεταβλητής.

Εφαρμογές: Υπολογισμός εμβαδών & ανισότητες στα ολοκληρώματα.

Τέχνασμα 3ο
«Από το πουθενά!»

Η Κεντρική Ιδέα

Όταν έχουμε **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** σε ολοκληρώματα, συχνά απαιτείται μια «έξυπνη» αλγεβρική παρέμβαση.

Αντικαθιστούμε το **1** με την ταυτότητα **$ημ^2x + συν^2x$**!

"Αυτό δημιουργεί κλάσματα που απλοποιούνται και υπολογίζονται άμεσα ως λογάριθμοι ή βασικές συναρτήσεις."

ΜΟΝΑΔΕΣ 50 ΕΩΣ 75

Τέχνασμα 3ο: "Από το πουθενά!"

1. Η Βασική Αρχή

Όταν έχουμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις σε μορφή κλάσματος, σπάνιες αλλά σωτήριες φορές, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον αριθμό **1** ("από το πουθενά!") με τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\boldsymbol{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}$.

2. Μεθοδολογία Επίλυσης

Αυτή η αντικατάσταση μας επιτρέπει να απλοποιήσουμε ριζικά την παράσταση:

Βήμα 1: Αντικαθιστούμε το 1 στον αριθμητή με την ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$.

Βήμα 2: Διασπάμε το αρχικό κλάσμα σε άθροισμα δύο ξεχωριστών κλασμάτων.

Βήμα 3: Απλοποιούμε τους όρους για να προκύψουν γνωστές συναρτήσεις όπως η $\varepsilon\varphi x$ και η $\sigma\varphi x$, οι οποίες ολοκληρώνονται εύκολα.

3. Χαρακτηριστικό Παράδειγμα

Υπολογισμός του ολοκληρώματος: $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}\,dx$ ή $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x}\,dx$.

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}\right)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)dx$$

$$= \Big[-\ln|\sigma\upsilon\nu x| + \ln|\eta\mu x|\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \Big[-\ln(\sigma\upsilon\nu x) + \ln(\eta\mu x)\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \ln\sqrt{3} - \ln\frac{\sqrt{3}}{3} = \ln 3$$

Β΄ τρόπος: Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με το $συν^2x$ δηλαδή

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{ημxσυνx}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\dfrac{1}{συν^2x}}{\dfrac{ημxσυνx}{συν^2x}}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\dfrac{1}{συν^2x}}{εφx}\,dx = \Big[\ln\left(εφx\right)\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = ...$$

Τέχνασμα 4ο: Ιδιότροπες… παραγωγίσεις

Η Κεντρική Ιδέα

Γιατί όλες οι παραγωγίσεις δεν είναι απλές!

Προσέχουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων και το πεδίο ορισμού να μην αλλάζει

«Παραγωγίσεις συναρτήσεων $f(x)^{g(x)}$ και εκθετικών συναρτήσεων με ρητό εκθέτη. Επίσης, παράγωγος απόλυτη τιμής."

ΜΟΝΑΔΕΣ 50 ΕΩΣ 75

Τέχνασμα 4ο: Ιδιότροπες παραγωγίσεις

Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α **$f(x) = x^x$** (για $x > 0$) : Μετατρέπουμε τη συνάρτηση με χρήση της εκθετικής μορφής **$f(x) = e^{x \cdot \ln x}$**, οπότε παραγωγίζεται χρησιμοποιώντας τον κανόνα σύνθετης συνάρτησης.

β **$f(x) = x^{2/3}$** : Παραγωγίζεται κανονικά με κανόνες για $x > 0$. Στο σημείο $x = 0$ ελέγχουμε χρησιμοποιώντας τον **ορισμό της παραγώγου** (όριο πηλίκου διαφορών) και βρίσκουμε ότι δεν ορίζεται.

γ **$f(x) = x^{4/3}$** : Όπως και στο (β), για $x > 0$ χρησιμοποιούμε κανόνες παραγώγισης. Στο $x = 0$ ελέγχουμε πάλι με τον ορισμό και διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 0$.

δ **$f(x) = |x^2 - 3x|$** : Ως απόλυτη τιμή συνεχούς συνάρτησης, τη διασπούμε σε κλάδους. Παραγωγίζουμε τα διαστήματα και ελέγχουμε τις παραγώγους στα κρίσιμα σημεία **$x = 0$** και **$x = 3$**.

$$\alpha)\ \left(x^x\right)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(x\ln x\right)' = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

$$\beta)\ \left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \begin{cases} \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' & ,x>0 \\ \left((-x)^{\frac{2}{3}}\right)' & ,x<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & ,x>0 \\ -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} & ,x<0 \end{cases}$$

και αποδεικνύουμε με τον ορισμό της παραγώγου στο $x_0 = 0$ ότι δεν ορίζεται.

$$\gamma)\ \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \begin{cases} \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' & ,x>0 \\ \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)' & ,x<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} & ,x\geq 0 \\ -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} & ,x<0 \end{cases}$$

και αποδεικνύουμε με τον ορισμό της παραγώγου στο $x_0 = 0$ ότι $f'(0) = 0$.

δ) Αρχικά, η συνάρτηση είναι συνεχής, ως απόλυτη τιμή συνεχούς – πολυωνυμικής – συνάρτησης. Η f γράφεται ισοδύναμα:

$$f(x) = \left|x^2 - 3x\right| = \begin{cases} -\left(x^2 - 3x\right) & ,0 \leq x < 3 \\ x^2 - 3x & ,x < 0 \text{ ή } x \geq 3 \end{cases} \quad \ldots.$$

Τέχνασμα 5ο: Τι αντίστροφη είσαι εσύ;

Αναλυτική διαδικασία εύρεσης της αντίστροφης συνάρτησης $f^{-1}(y)$ για την $f(x) = x^3$.

1. **Αρχική Συνάρτηση:** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$ με πεδίο ορισμού το R. Επειδή είναι γνησίως αύξουσα στο R, είναι συνάρτηση 1-1, επομένως αντιστρέφεται.

2. **Σχέση Αντιστροφής:** Θέτουμε $y = f(x) \Leftrightarrow y = x^3$. Στόχος μας είναι να επιλύσουμε την εξίσωση ως προς x, διακρίνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο του y.

3. **Περίπτωση 1η:** Αν $y \geq 0$, τότε αναγκαστικά $x \geq 0$. Λύνοντας την $y = x^3$ εξάγουμε $x = \sqrt[3]{y}$. Άρα, για μη αρνητικές τιμές: $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

4. **Περίπτωση 2η:** Αν $y < 0$, τότε $x < 0$. Έχουμε $-y = -x^3 \Leftrightarrow -y = (-x)^3 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{(-y)} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{(-y)}$. Επομένως: $f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{(-y)}$

$$y = x^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{y} & ,y \geq 0 \\ x = -\sqrt[3]{-y} & ,y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y} & ,y \geq 0 \\ f^{-1}(y) = -\sqrt[3]{-y} & ,y < 0 \end{cases}$$

Τέχνασμα 6ο: Ολοκλήρωμα Αντίστροφης Συνάρτησης

1. Προϋποθέσεις

Έστω μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι **γνησίως αύξουσα** με **συνεχή παράγωγο**. Αν η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $[f(\alpha), f(\beta)]$, τότε ισχύει η παρακάτω σχέση.

2. Ο Βασικός Τύπος

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx = \left[xf(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

3. Απόδειξη με Αντικατάσταση

- **Θέτουμε:** $u = f^{-1}(x)$, το οποίο ισοδυναμεί με $f(u) = x$.
- **Παραγωγίζοντας** τα δύο μέλη, προκύπτει: $dx = f'(u)\,du$.
- **Αλλαγή ορίων:** Για $x = f(\alpha)$ έχουμε $u = \alpha$. Για $x = f(\beta)$ έχουμε $u = \beta$.
- **Αντικατάσταση:** Το αρχικό ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε
- **Παραγοντική Ολοκλήρωση:**

$$\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} uf'(u)\,du$$

$$= \left[xf(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Τέχνασμα 7ο: Ένα σχολικό απαιτητικό όριο

1. Το Ζητούμενο

Ζητείται ο υπολογισμός του παρακάτω ορίου, το οποίο αρχικά οδηγεί σε απροσδιοριστία μορφής $0 \cdot (-\infty)$:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1-e^{-x}\right)\ln x\right]=?$$

2. Μεθοδολογία - Το Τέχνασμα

Για να άρουμε την απροσδιοριστία, **πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με το** x, ώστε να διασπάσουμε την παράσταση σε γινόμενο γνωστών ορίων:

3. Υπολογισμός και Συμπέρασμα

Από τη θεωρία γνωρίζουμε τα εξής βασικά όρια:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(1-e^{-x}\right)\ln x\right]\underset{(AM)}{\overset{0(-\infty)}{=}}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1-e^{-x}\right)}{x}x\cdot\ln x\right]=\ldots=1\cdot 0=0$$

Τέχνασμα 8ο: Γενικεύοντας ένα σχολικό όριο

1. Η Βασική Έννοια

Ο ορισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης f σ
στις εξετάσεις ζητείται ο γρήγορος υπολογισμ
συγκεκριμένο μοτίβο μεταβλητών.

8. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=-f'(x_0)$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2f'(x_0)$.

2. Ο Γενικευμένος Τύπος

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

3. Προϋποθέσεις Εφαρμογής

Για να ισχύει η παραπάνω σχέση, είναι **απαραίτητο** η συνάρτηση f να είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0. Οι παράμετροι α και β είναι δεδομένοι πραγματικοί αριθμοί (όχι κατ' ανάγκην μη μηδενικοί, αν και έχει ενδιαφέρον μόνο για α, β διαφορετικά από το μηδέν στα παραδείγματα που εφαρμόζουμε στις ασκήσεις).

Τέχνασμα 9ο: Μια συνάρτηση σχολικού βιβλίου

1 **Δεδομένη Συνάρτηση:** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2ημx + εφx - 3x$

2 **Πεδίο Ορισμού:** Η συνάρτηση μελετάται στο ανοικτό διάστημα $x \in (-π/2, π/2)$

3 **Ζητούμενα:** Να μελετηθεί η συνάρτηση **f** ως προς τη **μονοτονία** και να βρεθούν τα **ακρότατά** της.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = 2ημx + εφx - 3x$, $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $2ημx + εφx \geq 3x$, για κάθε $x \in \left[0, \frac{π}{2}\right)$.

Τέχνασμα 10ο: Σταθερή συνάρτηση μέσα από το σχολικό βιβλίο (1)

1 **Δεδομένα Πρότασης**

Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$, για $M > 0$, και όλα τα $x, y \in \mathbb{R}$

2 **Ζητούμενο**

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι **σταθερή**.

3 **Σημείωση**

(επαφίεται στον αναγνώστη)

1. Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ' όλο το R ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Τέχνασμα 11ο: Και αν δεν υπολογίζεται το ολοκλήρωμα;

Παρατηρούμε ότι το κάθε ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται με τις στοιχειώδεις γνώσεις που διαθέτουμε. Όμως αν «παίξουμε» λίγο με τις ιδιότητες τότε έχουμε:

$$\int_{\kappa}^{e} \frac{x^2+1}{x^2+\ln x+1}dx+\int_{\kappa}^{e} \frac{\ln x}{x^2+\ln x+1}dx=e-2026$$

$$\Leftrightarrow \int_{\kappa}^{e} \frac{x^2+\ln x+1}{x^2+\ln x+1}dx=e-2026$$

$$\Leftrightarrow \int_{\kappa}^{e} 1dx=e-2026$$

$$\Leftrightarrow 1\cdot(e-\kappa)=e-2026 \Leftrightarrow \kappa=2026$$

1

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Απάντηση

α) ....

β) ......

γ) Από το (β) ερώτημα έχουμε: $f'(x)=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

οπότε $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\left[\ln f(x)\right]_0^1= ....$

2

Ιδέα 3η: Ολοκλήρωμα περιττής συνάρτησης με αντίθετα άκρα ολοκλήρωσης

Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$.

Απάντηση

Αντικαθιστούμε $x=-u$ κτλ. και προκύπτει $I=-I \Leftrightarrow 2I=0 \Leftrightarrow I=0$.

3

Ιδέα 4η: Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}dx+\int_1^e \sqrt{\ln x}\,dx=e$.

Τέχνασμα 12ο: Ανισότητα και εύρεση εφαπτομένης

Μια κλασική εφαρμογή όπου αξιοποιούμε διπλές ανισοτικές σχέσεις για τον υπολογισμό της παραγώγου και την εύρεση της εξίσωσης εφαπτομένης μιας συνάρτησης f.

1

5. Αν $x+1 \le f(x) \le x^2+x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$

ii) $1 \ge \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge x+1$, για $x<0$ και

$1 \le \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \le x+1$, για $x>0$

iii) $f'(0)=1$.

ιπτομένης της γραφικής παράστασης της

ύρεση του f(1) με αντικατάσταση και ο

εμβολής στον λόγο μεταβολής) επαφίεται στον

Τέχνασμα 13ο: Εκφράσεις εφαπτομένων γραφικής παράστασης

Οι βασικές περιπτώσεις που συναντάμε για την εύρεση εφαπτομένης:

1. **Από γνωστό σημείο:** Εφαπτομένη να διέρχεται από γνωστό σημείο Α(α, β)
2. **Παράλληλη:** Εφαπτομένη παράλληλη σε γνωστή ευθεία y = αx + β (ή στον άξονα x'x)
3. **Κάθετη:** Εφαπτομένη κάθετη σε γνωστή ευθεία y = αx + β
4. **Γνωστή εξίσωση:** Δεδομένη η εξίσωση της εφαπτομένης
5. **Κοινή εφαπτομένη:** Κοινή εφαπτομένη δύο γραφικών παραστάσεων f και g (σε κοινό ή σε διαφορετικά σημεία)

(η απόδειξη / μεθοδολογία επαφίεται στον αναγνώστη)

Τέχνασμα 14ο

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$$

Κεντρική Ιδέα

Πώς γίνεται ένα ολοκλήρωμα να **ισούται με μηδέν**, χωρίς η συνάρτηση να είναι μηδενική ή τα άκρα ολοκλήρωσης να είναι ίσα;

Αν **$f(x) \geq 0$** για κάθε x, ο μηδενισμός του ολοκληρώματος οδηγεί συχνά στο συμπέρασμα ότι **$\alpha = \beta$**.

"Ένα από τα πιο ισχυρά εργαλεία για μαθητές που στοχεύουν στην κορυφή και τις υψηλές επιδόσεις."

ΜΟΝΑΔΕΣ 75 ΕΩΣ 100

Τέχνασμα 14ο: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$

1. Αρχικά γίνεται ένα ολοκλήρωμα να ισούται με μηδέν **χωρίς** η συνάρτηση να είναι μηδέν παντού, αλλά και ούτε τα άκρα ολοκλήρωσης να είναι ίσα. Για παράδειγμα, $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = 0$.

α. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, χωρίς να είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε συμπεραίνουμε ότι τα άκρα ταυτίζονται, δηλαδή **α = β**.

β. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε αν το ολοκλήρωμα από α έως β ισούται με 0, προκύπτει ότι **f(x) = 0** για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Αν $\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} \left(f^2(t)+1\right) dt = 0$ τότε … β) Αν $\int_{1-\lambda}^{1+\lambda} \left(f^2(t)-f(t)+1\right) dt \leq 0$ τότε …

γ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$,τέτοια ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2\right) dx = 0$$

για οποιουσδήποτε α, β θετικούς αριθμούς. Ο τύπος της f είναι …

__Σημείωση:__ Μπορεί να δίνεται ότι η f είναι συνεχής και f(x) ≠ 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$, , άρα το πρόσημο της f είναι σταθερό. Οπότε αν το ολοκλήρωμα από το α έως το β είναι μηδέν, τότε απαραίτητα α = β.

Τέχνασμα 15ο: Εύρεση τιμής από γνωστή συναρτησιακή σχέση

1. Το Πρόβλημα

Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) + ln(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Ζητείται να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

2. Πρώτο Βήμα: Προφανής Λύση

Για $x = 1$, η δεδομένη σχέση γίνεται: $\boldsymbol{f(1) + ln(f(1)) = 1}$.

Παρατηρούμε ότι μια **προφανής λύση** αυτής της εξίσωσης είναι η $\boldsymbol{f(1) = 1}$, αφού $1 + ln(1) = 1 + 0 = 1$.

3. Απόδειξη Μοναδικότητας με Βοηθητική Συνάρτηση

- **Θεωρούμε:** Τη βοηθητική συνάρτηση $\boldsymbol{g(x) = x + lnx}$, με πεδίο ορισμού $x > 0$.
- **Μονοτονία:** Ως άθροισμα γνησίως αυξουσών συναρτήσεων, η g είναι **γνησίως αύξουσα** (επομένως και συνάρτηση 1-1).
- **Μετασχηματισμός:** Η σχέση $f(1) + ln(f(1)) = 1 + ln(1)$ γράφεται $\boldsymbol{g(f(1)) = g(1)}$.
- **Συμπέρασμα:** Λόγω της 1-1 ιδιότητας της g, προκύπτει τελικά $\boldsymbol{f(1) = 1}$.

Τέχνασμα 16ο: Αρχική συνάρτηση μέσα σε ολοκλήρωμα ή σε όριο

Δίνεται η $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x\in\mathbb{R}$. Αν F είναι η αρχική συνάρτηση της f στο ℝ, τότε να υπολογίσετε:

α **Υπολογισμός Ολοκληρώματος $\int_{-1}^{1} F(x)\,dx$:** Η επίλυση γίνεται με χρήση παραγοντικής

ολοκλήρωσης, γράφοντας ∫(x)'F(x)dx = [x·F(x)] - ∫x·F'(x)dx, όπου φυσικά ισχύει F'(x) = f(x).

β **Υπολογισμός Ορίου** $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{f(x)}$

Με δεδομένο ότι $\lim_{x\to+\infty} F(x)=0$., η προσέγγιση βασίζεται στην εφαρμογή του κανόνα του **L'Hospital**, παραγωγίζοντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή, δηλαδή:

$$\beta)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{f(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x)}{f'(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f'(x)} = \dots$$

γ Πολλές φορές παίρνουμε την αρχική μιας συνάρτησης f χωρίς να την γνωρίζουμε για να αποφύγουμε το ολοκλήρωμα, δηλαδή:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left[\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx\right] = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta)-F(\alpha).$$

Τέχνασμα 17ο: Μοτίβο = συνάρτηση

Αν ένα μοτίβο επαναλαμβάνεται σε μια σχέση, αυτό υποδηλώνει βοηθητική συνάρτηση. Εφαρμογές:

α

Σε εξισώσεις

Εντοπισμός όμοιων παραστάσεων που μπορούν να αντικατασταθούν από μια κοινή βοηθητική συνάρτηση για τη διευκόλυνση της επίλυσης.

Δίνεται η κυρτή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x),\ x\in[0,+\infty).$$

(Θέμα Γ4 /Εξετάσεων 2016)

Τότε θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g(x)=f(x+3)-f(x)$.

β

Σε ανισότητες / ανισώσεις

Ορισμός κατάλληλης βοηθητικής συνάρτησης με βάση το επαναλαμβανόμενο μοτίβο, ώστε να αξιοποιηθούν οι ιδιότητες της μονοτονίας.

Αν μας ζητάνε να αποδείξουμε πχ. $\dfrac{f(\alpha)+1}{\alpha}<\dfrac{f(\beta)+1}{\beta}$ τότε θα θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)+1}{x}$

και θα δείχνουμε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και για $\alpha<\beta$ …

Τέχνασμα 17ο: Μοτίβο = συνάρτηση

γ Σε απόλυτες τιμές ή παραστάσεις

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x)-f(y)-e^x+e^y|\le(x-y)^2$ για όλα τα $x,y\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

Θέτουμε: $g(x)=f(x)-e^x$ και η σχέση γίνεται

$|g(x)-g(y)|\le(x-y)^2$ άρα από άσκηση σχ. βιβλίου (Β1 σχολικού βιβλίου /συνέπειες Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$$g(x)=c\Rightarrow f(x)-e^x=c, x\in\mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

$$g(x)=c\Rightarrow f(x)-e^x=c, x\in\mathbb{R} \text{ κτλ.}$$

Τέχνασμα 18ο: Πρόσημο συνάρτησης

±

A Επίλυση της εξίσωσης f(x) = 0

Η συνάρτηση ***f*** διατηρεί πρόσημο στα διαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες της (αν είναι συνεχής). Βρίσκουμε το πρόσημο μιας τυχαίας τιμής σε κάθε υποδιάστημα για να καθορίσουμε το σταθερό πρόσημο.

πχ. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x,\ x \in [0, 2\pi].$$

B Χρήση παραγώγου και συνόλου τιμών

Αν η εξίσωση *f(x) = 0* δεν επιλύεται αλγεβρικά, αναζητούμε μια προφανή ρίζα ή εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano. Στη συνέχεια, μέσω της παραγώγου μελετάμε τη μονοτονία και εξάγουμε το πρόσημο με βάση τη θέση του *x* ως προς τη ρίζα.

Γ Χρησιμότητα Εύρεσης Προσήμου

Η γνώση του προσήμου της συνάρτησης είναι καθοριστική για:

Απαλοιφή απόλυτης τιμής σε συναρτήσεις. πχ. $\left|e^x - 2x\right|$

Υπολογισμό ορίων της μορφής α/0. πχ. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{e^{f(x)} - x}$

Υπολογισμό εμβαδού χωρίου (ορισμένο ολοκλήρωμα). πχ. $\int_0^1 \left|f(x) - x + 1\right| dx$.

Τέχνασμα 19ο: Σταθερά c σε ζητούμενη σχέση

Ζητείται ο τύπος συνάρτησης και στη ζητούμενη σχέση υπάρχει μια πραγματική σταθερά c.

1 **Βήμα 1ο:** Λύνουμε τη ζητούμενη ισότητα ως προς την σταθερά c.

2 **Βήμα 2ο:** Θεωρούμε f τη συνάρτηση του δεύτερου μέλους

3 **Βήμα 3ο:** Αποδεικνύουμε ότι η f είναι σταθερή, δηλαδή η παράγωγος ισούται με το μηδέν.

Παράδειγμα

Δίνεται συνάρτηση f τέτοια ώστε $f''(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f'(x)+f(x)=c\cdot e^{x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Απάντηση

Λύνουμε τη ζητούμενη ισότητα ως προς τη σταθερά c: $f'(x)+f(x)=c\cdot e^{x}\Leftrightarrow\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}=c$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι είναι σταθερή.

$$g'(x)=\left(f''(x)+f'(x)\right)e^{-x}-\left(f'(x)+f(x)\right)e^{-x}=\left(f''(x)-f(x)\right)e^{-x}=0.$$

Τέχνασμα 20ο: Ανισότητες με αντίθετη φορά

1. Η Βασική Αρχή

Υπάρχουν βασικές ανισότητες που γίνονται ισότητες μόνο σε συγκεκριμένα σημεία. Αν σε μία άσκηση δοθεί μία από αυτές τις ανισότητες με την **αντίθετη φορά**, τότε αναγκαστικά συμπεραίνουμε ότι **ισχύει μόνο η ισότητα**.

2. Οι Βασικές Ανισότητες με Αντίθετη Φορά

- Αν $e^x \le x+1$ τότε ισχύει μόνο για $x=0$
- Αν $\ln x \ge x-1$ τότε ισχύει μόνο για $x=1$
- Αν $|\eta\mu x| \ge |x|$ τότε ισχύει μόνο για $x=0$

$$\ln\left(f(x)+\sqrt{x}-x+1\right) \ge f(x)+\sqrt{x}-x \text{ για κάθε } x \ge 0$$

τότε ισχύει ως ισότητα οπότε

$$f(x)+\sqrt{x}-x+1=1 \Leftrightarrow f(x)=x-\sqrt{x} \text{ για κάθε } x \ge 0.$$

3. Εφαρμογή (Σύνθετες Συναρτήσεις)

Για παράδειγμα, δίνεται ότι $e^{f(x)-\eta\mu x} \le f(x)-\eta\mu x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επειδή γνωρίζουμε ότι ισχύει πάντα $e^u \ge u+1$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει αναγκαστικά η ισότητα:

$$f(x) - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τέχνασμα 21ο: Άρτια – περιττή και εύρεση τύπου

Μεθοδολογία προσδιορισμού του τύπου μιας συνάρτησης f όταν γνωρίζουμε ότι παρουσιάζει συμμετρία (είναι άρτια ή περιττή).

1. **Αντικατάσταση μεταβλητής:** Αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, τότε την αντικαθιστούμε στη δεδομένη σχέση (εξίσωση ή ανισότητα) όπου x το $-x$.

2. **Εφαρμογή ιδιότητας:** Αξιοποιούμε την ιδιότητα της συμμετρίας, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ αν είναι άρτια ή $f(-x) = -f(x)$ αν είναι περιττή.

3. **Προσδιορισμός τύπου:** Συνδυάζοντας την αρχική με τη νέα σχέση, δημιουργούμε ένα σύστημα το οποίο επιλύουμε για να βρούμε τον ζητούμενο τύπο της συνάρτησης.

- **Χαρακτηριστικό Παράδειγμα:** Με την εφαρμογή των παραπάνω βημάτων και την κατάλληλη επεξεργασία, προκύπτει ο τύπος της συνάρτησης, όπως θα δούμε στο παράδειγμα παρακάτω.

Τέχνασμα 21ο: Άρτια – περιττή και εύρεση τύπου

Παράδειγμα

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$. Αν

$$xf(x)\le x+\eta\mu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ τότε:}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=2$ β) Να βρείτε τον τύπο της f.

Απάντηση

α) Διακρίνουμε περιπτώσεις για $x>0$, $x<0$ και στη συνέχεια διαιρούμε με x και παίρνουμε τα όρια κατά μέλη επειδή υπάρχουν.

β) Θα αντικαταστήσουμε όπου x το $-x$ και έχουμε:

$$-xf(x)\le -x-\eta\mu x \Rightarrow x+\eta\mu x\le xf(x)$$

όμως $xf(x)\le x+\eta\mu x$ άρα

$$x+\eta\mu x\le xf(x)\le x+\eta\mu x \Rightarrow xf(x)=x+\eta\mu x$$

$$\Rightarrow f(x)=1+\frac{\eta\mu x}{x}, x\ne 0 \; .$$

Επομένως,

$$f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{\eta\mu x}{x} & ,x\ne 0\\ 2 & ,x=0\end{cases} .$$

Τέχνασμα 22ο: "Εύρεση τύπου μέσω εφαρμογής (ce^x)"

1. Η Βασική Σχέση

Η θεμελιώδης διαφορική εξίσωση του σχολικού βιβλίου για την εύρεση τύπου συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^x$$

2. Μεθοδολογία Επίλυσης

Όταν έχουμε πιο σύνθετες σχέσεις, τις ανάγουμε στη βασική μορφή ακολουθώντας αυτά τα βήματα:

Βήμα 1: Προσπαθούμε να καταλήξουμε στη μορφή $(\ )' = (\ )$

Βήμα 2: Εφαρμόζουμε την παραπάνω πρόταση που είναι εφαρμογή του σχολικού βιβλίου χωρίς απόδειξη.

Βήμα 3: Υπολογίζουμε τη σταθερά c αν μας δίνεται μια τιμή της συνάρτησης.

3. Χαρακτηριστικό Παράδειγμα

Αν $f'(x)+1=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}$ τότε να βρείτε τον τύπο της f.

Απάντηση

$$f'(x)+1=f(x)+x \Leftrightarrow (f(x)+x)'=f(x)+x \Leftrightarrow f(x)+x=ce^x \Leftrightarrow f(x)=ce^x-x$$

Τέχνασμα 23ο: Μορφές που είναι ή ανάγονται στην μορφή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Μορφές που είναι ή ανάγονται στη μορφή $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Εφαρμόζουμε **Θ.Μ.Τ.** για τη συνάρτηση f στο διάστημα [α, β].

Παράδειγμα:

Η ανίσωση της μορφής $2f(2)\le f(1)+f(3)$ ανάγεται στη μορφή

$$f(2) - f(1) \le f(3) - f(2)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\le\frac{f(3)-f(2)}{3-2}.$$

Εφαρμογή **Θ.Μ.Τ.** στα διαστήματα **[1, 2]** και **[2, 3]**.

Τέχνασμα 24ο: Ολοκληρώματα $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$

1. Η Βασική Αρχή

Όταν καλούμαστε να υπολογίσουμε **συμμετρικά ολοκληρώματα** της μορφής, η συμμετρία του διαστήματος προσφέρει ισχυρά εργαλεία για την απλοποίησή τους.

2. Μεθοδολογία Επίλυσης

Βασικές ενέργειες για την αντιμετώπιση τέτοιων ολοκληρωμάτων:

Αντικατάσταση: Σε πολλές περιπτώσεις θέτουμε $u = -x$ (οπότε $dx = -du$).

Περιττή Συνάρτηση: Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f είναι **περιττή** στο $[-\alpha, \alpha]$, τότε αποδεικνύεται άμεσα ότι το ολοκλήρωμά της ισούται με μηδέν.

3. Χαρακτηριστικό Παράδειγμα

Αν $\alpha \in (-2026, 2026)$ και $I = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\cdot \text{συν}x\, dx$, με f περιττή συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι $I = 0$.

→

Υπόδειξη

Θέτουμε $x = -u$ άρα $dx = -du$, οπότε γίνεται: $I = -I$ δηλ. $2I = 0$ δηλ. $I = 0$.

Τέχνασμα 25ο: Με δεδομένο το σύνολο τιμών

1. Αν δίνεται το **σύνολο τιμών** μιας συνάρτησης και γνωρίζουμε ότι είναι **γνησίως μονότονη**...

2. ...τότε γνωρίζουμε αυτόματα και τα **όρια στα άκρα** του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(A)=(0,+\infty)$.

α) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{f(x)+x}$.

β) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{f(x)+x}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f(x)-x}{f(x)+x}, x>0$

> *"Η γνώση της μονοτονίας και του συνόλου τιμών ξεκλειδώνει άμεσα τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα όρια του πεδίου ορισμού της!"*

Τέχνασμα 26ο: Ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή παραμέτρου

Ασκήσεις με παράμετρο στη συνάρτηση όπου ζητείται η τιμή της που μεγιστοποιεί το ελάχιστο ή ελαχιστοποιεί το μέγιστο.

Παράδειγμα 1

πχ. Να βρεθεί η **μεγαλύτερη** τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{e^x - \lambda x}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη: $e^x \geq \lambda x \Leftrightarrow e^x - \lambda x \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \min f(x) \geq 0 \ldots$

Παράδειγμα 2

πχ. Να βρεθεί η μικρότερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{-x} - \lambda x} = -\infty .$$

Υπόδειξη: $e^{-x} \leq \lambda x \Leftrightarrow e^{-x} - \lambda x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \max f(x) \leq 0$.

Μονάδες 75-100

Τέχνασμα 27ο: Μονοτονία και εξίσωση

1. Αν η συνάρτηση **f** είναι γνησίως μονότονη, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει το πολύ μια λύση.
2. **Επέκταση:** Όταν η **f** εμφανίζεται πολλαπλές φορές:

π.χ. $f(x) + f(x^2) + ... = f(\rho) + ...$

πχ. «Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση f στο $[0,1]$. Να λύσετε την εξίσωση

$$f(x)+f(x^3)+...+f(x^{2025})=f(x^2)+f(x^4)+..+f(x^{2026}),x\in[0,1] \quad (1)».$$

Λύση

Η εξίσωση (1) έχει δύο προφανείς λύσεις τις $x_1=0, x_2=1$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας). Έστω ότι υπάρχει μια ρίζα $\rho\in(0,1)$ τότε:

$$\rho>\rho^2 \Rightarrow f(\rho)>f(\rho^2)$$

$$\rho^3>\rho^4 \Rightarrow f(\rho^3)>f(\rho^4)$$

$$\rho^5>\rho^6 \Rightarrow f(\rho^5)>f(\rho^6)$$

....

$$\rho^{2025}>\rho^{2026} \Rightarrow f(\rho^{2025})>f(\rho^{2026})$$

με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$f(\rho)+f(\rho^3)+...+f(\rho^{2025})>f(\rho^2)+f(\rho^4)+..+f(\rho^{2026}) \text{ άτοπο!}$$

Άρα δεν υπάρχει καμία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$ οπότε οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης (1) είναι οι 0 και 1.

Τέχνασμα 28ο: Πολλαπλό Bolzano

1

Παράδειγμα:

πχ. «Αν $f(x) = -x^3 - x + 3, x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)\left(x^5 + \alpha x^3 + \beta ημx + 1\right) = e^x,\ x \in \mathbb{R} \ \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$».

2

Βήμα 1ο (Εύρεση ρίζας της f):

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0, 2)$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Bolzano.

3

Βήμα 2ο (Εφαρμογή στην g):

Εφαρμόζουμε ξανά το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτησ $g(x) = f(x)\left(x^5 + \alpha x^3 + \beta ημx + 1\right) - e^x$ στο νέο υποδιάστημα $(0, x_0)$.

Τέχνασμα 29ο: "Μοναδικό c σε διάστημα"

1. Η Βασική Αρχή

Για την απόδειξη ύπαρξης και μοναδικότητας ενός σημείου c σε ένα δοσμένο διάστημα, συνδυάζουμε το **Θεώρημα Bolzano** (για την ύπαρξη) με τη **μονοτονία** (για τη μοναδικότητα) μιας κατάλληλης βοηθητικής συνάρτησης.

2. Μεθοδολογία Επίλυσης

Ακολουθούμε τα παρακάτω συστηματικά βήματα:

Βήμα 1: Αναδιατάσσουμε τη ζητούμενη σχέση για να ορίσουμε μια βοηθητική συνάρτηση $h(x)$.

Βήμα 2: Μελετάμε και αποδεικνύουμε ότι η $h(x)$ είναι γνησίως μονότονη (ώστε η ρίζα να είναι μοναδική).

Βήμα 3: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για την $h(x)$ στο κλειστό διάστημα για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη της ρίζας.

3. Χαρακτηριστικό Παράδειγμα

πχ. «Αν $f^3(x)+e^{2x}f(x)=e^{3x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε να αποδείξετε ότι

ένα ακριβώς $c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x)=ce^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ »

$$f^3(x)+e^{2x}f(x)=e^{3x} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)^3+\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)-1=0 \Leftrightarrow h\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)=0$$

όπου $h(x)=x^3+x-1$ που είναι γνησίως αύξουσα (γιατί;) άρα

ζητούμε ένα μοναδικό $c\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(c)=0$ που προκύπτει

άμεσα με το Θεώρημα Bolzano για τη h στο κλειστό διάστημα $[0,1]$.

Τέχνασμα 30ο: Συμμετρικό ολοκλήρωμα

1. Το Πρόβλημα

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ άρτια και συνεχής συνάρτηση και $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\lambda$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ ως συνάρτηση του λ.

2. Η Τεχνική Επίλυσης

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο αντικατάστασης για συμμετρικά όρια ολοκλήρωσης:

Αντικατάσταση: Θέτουμε $u = -x$, οπότε $dx = -du$. Τα όρια αντιστρέφονται και επανέρχονται στην αρχική τους σειρά με τη χρήση του αρνητικού προσήμου $-du$.

Αρτιότητα: Αξιοποιούμε την ιδιότητα της άρτιας συνάρτησης, δηλαδή $f(-u) = f(u)$.

Πρόσθεση: Προσθέτουμε το αρχικό ολοκλήρωμα με το προκύπτον για να απλοποιηθεί ο εκθετικός όρος του παρονομαστή.

3. Αποτέλεσμα & Απλοποίηση

Θέτουμε όπου x το −u (συνήθης αντικατάσταση αν τα άκρα είναι συμμετρικά ως προς το μηδέν) και βρίσκουμε

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{f(-u)}{e^{-u}+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{f(u)e^u}{e^u+1}dx$$

$$I+I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{e^x+1}dx+\int_{-1}^{1}\frac{f(x)e^x}{e^x+1}dx\Rightarrow 2I=\int_{-1}^{1}\frac{f(x)+f(x)e^x}{e^x+1}dx$$

$$\Rightarrow 2I=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\lambda$$

$$\Rightarrow I=\frac{\lambda}{2}$$

Τέχνασμα 31ο: f(A) vs g(A)

Όταν ζητείται να λυθεί η εξίσωση $f(x)=g(x),\ x\in A$ τότε εξετάζουμε τα σύνολα τιμών των f και g.

Ας υποθέσουμε $f(A)=[\alpha,+\infty)$ και $g(A)=(-\infty,\beta]$.

α
- Αν $\alpha>\beta$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

β
- Αν $\alpha=\beta$ τότε αναζητούμε αν υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=g(x_0)=\alpha=\beta$. Αν ναι, τότε το x_0 είναι μια ρίζα της εξίσωσης, αν όχι, τότε η εξίσωση είναι πάλι αδύνατη.

γ
- Αν $\alpha<\beta$ τότε όλα είναι πιθανά! Πρέπει να γίνει διαφορετική διερεύνηση – προσέγγιση στο πρόβλημα.

f(A) vs *g(A)*

Παράδειγμα

1 **πχ.** «Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=(2-\eta\mu x)^{2027}$, $x\in\mathbb{R}$».

Απάντηση

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R})=(-1,1)$, ενώ το β΄ μέλος παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[1,3^{2027}\right]$,επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη!

$f(A)$	vs	$g(A)$

Τέχνασμα 31ο: f(A) vs g(A)

πχ. «Εστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=(2-\eta\mu x)^{2027}$, $x\in\mathbb{R}$».

Απάντηση

Εύκολα αποδεικνύεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R})=(-1,1)$, ενώ το β΄ μέλος παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[1,3^{2027}\right]$,επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη!

f(A) vs *g(A)*

Τέχνασμα 32ο: "Διπλό Fermat"

1. Το Πρόβλημα (Σύγκριση Συνόλων Τιμών)

πχ. «Αν έχουμε $2f(x) \ge f(\alpha) + f(\beta)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

2. Ανάλυση Συνόλων Τιμών

- Για $x = \alpha$ έχουμε: $f(\alpha) \ge f(\beta)$
- Για $x = \beta$ έχουμε: $f(\beta) \ge f(\alpha)$

άρα $f(\alpha) = f(\beta)$ οπότε από τη δεδομένη σχέση έχουμε:

$$f(x) \ge f(\alpha) = f(\beta) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

3. Συμπέρασμα

άρα από Θ. Fermat έχουμε:

$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0 \text{ ».}$$