ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Νομού Ημαθίας

ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά και Πανελλαδικές : Ο δρόμος προς την επιτυχία

Θωμάς Ποδηματάς

Βέροια 29 Μαρτίου 2026

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Παράρτημα Νομού Ημαθίας

ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ένα ενδιαφέρον θέμα για τη Γ΄ Λυκείου :
ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
Η κατασκευή…

Θωμάς Ποδηματάς

Βέροια 29 Μαρτίου 2026

Κυρίες και κύριοι συνάδελφοι, αγαπητά παιδιά, σας χαιρετώ.

Είναι μεγάλη τιμή και χαρά που βρίσκομαι εδώ σήμερα στη **Βέροια**, ανάμεσα σε εξαιρετικούς και διακεκριμένους συναδέλφους, να συμβάλω το απειροστό που μου αναλογεί στη διδασκαλία των Μαθηματικών μας. Ευχαριστώ θερμά το **τοπικό παράρτημα** που μου έδωσε την ευκαιρία αυτή.

Σήμερα θα μιλήσουμε για τις **Ανισότητες** στα **Ολοκληρώματα**. Θα δούμε τρόπους κατασκευής των Ανισοτήτων αυτών και πως, τελικά, προκύπτουν **θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων**.

Η Θεωρία…

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

Αν είναι $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\geq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Αν είναι $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ **αλλά όχι παντού** 0 στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx>0$

Τα παρακάτω πορίσματα, σύμφωνα με τις **Οδηγίες του Ι.Ε.Π.** μπορούν να χρησιμοποιηθούν **χωρίς απόδειξη**, άρα λογίζονται ως **ΘΕΩΡΙΑ**, επίσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1

Αν είναι $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2

Αν είναι $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, αλλά η ισότητα $f(x)=g(x)$ **δεν συμβαίνει παντού** στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

Το Πρόβλημα…

Αρκετά συχνά, στις Εξετάσεις, **ιδίως στο Θέμα Δ4**, εμφανίζονται **ανισοτικές σχέσεις** με **ολοκληρώματα**, της μορφής **να αποδείξετε ότι** :

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx > 7$$

Η **βασική φιλοσοφία** που ακολουθεί ο **κατασκευαστής** μιας **ανισότητας με ολοκλήρωμα**, είναι η ακόλουθη :

Χρησιμοποιεί μία αληθή ανισότητα $A(x) \geq B(x)$ η οποία προκύπτει, είτε από τα δεδομένα του προβλήματος, είτε είναι μία από τις γνωστές ανισότητες, όπως για παράδειγμα

✓ $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$

✓ $\ln x \leq x-1$, $\forall x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=1$

✓ $|\eta\mu x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$

✓ $x+\frac{1}{x} \geq 2$, $\forall x > 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=1$

και κατόπιν την ολοκληρώνει σε κάποιο διάστημα $[\alpha,\beta]$, οπότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} B(x)dx$$

Το πρώτο από αυτά, $\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx$ **δεν υπολογίζεται**, ενώ το δεύτερο,

$\int_{\alpha}^{\beta} B(x)dx$ **υπολογίζεται** και ας πούμε ότι δίνει 7 , δηλαδή

$\int_{\alpha}^{\beta} B(x)dx = 7$. Κατόπιν μας ζητά να δείξουμε ότι : $\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx \geq 7$.

Ως, λύτες, **βλέπουμε** το $\int_{\alpha}^{\beta} A(x)dx$. Η ποσότητα $A(x)$ είναι αυτή για την οποία **προσπαθούμε να γράψουμε μια ανισότητα** την οποία στη συνέχεια θα **ολοκληρώσουμε**.

Θα προσπαθήσω, σήμερα, να σας δώσω **όσο το δυνατόν περισσότερους** από τους **λογικούς τρόπους** με τους οποίους ένας θεματοδότης μπορεί να κατασκευάσει μία ανισότητα, για την ποσότητα $A(x)$, την οποία κατόπιν θα ολοκληρώσει, **προκειμένου να κατασκευάσει ένα θέμα Εξετάσεων**, όπως αυτά που ήδη έχουν τεθεί, στις Εξετάσεις

- ✓ του 1998 (εξαιρετικά δύσκολο 4ο θέμα, συναρτησιακή ανισότητα),
- ✓ του 2002 (Θέμα 4ο – Β ιιι),
- ✓ του 2007 (Θέμα 4ο α και γ),
- ✓ του 2010 (Δ4 – συναρτησιακή ανισότητα, όχι ανισότητα αριθμών),
- ✓ του 2011 στις Επαναληπτικές (Θέμα Δ4),
- ✓ του 2012 (Δ3 – συναρτησιακή ανισότητα, όχι ανισότητα αριθμών),
- ✓ του 2013 (Δ2 – συναρτησιακή ανισότητα, όχι ανισότητα αριθμών),
- ✓ του 2015 (Θέμα Δ4, μέσα σε εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano),
- ✓ του 2015 (επαναληπτικές στο Δ4, αλλά συναρτησιακή ανισότητα, όχι ανισότητα αριθμών),

- ✓ του 2016 (Δ4),
- ✓ του 2017 (Γ4 – **το μοναδικό σε Γ θέμα**! και στις Επαναληπτικές του 2023 **επίσης Γ4**),
- ✓ του 2017 (Επαναληπτικές Δ4),
- ✓ του 2018 (Δ4),
- ✓ του 2019 (Επαναληπτικές Δ3),
- ✓ του 2020 (Παλαιό Δ4, μέσα σε εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano),
- ✓ του 2022 (Επαναληπτικές Δ4),
- ✓ του 2023 (**Επαναληπτικές Γ4**),
- ✓ του 2025 (Δ4) και
- ✓ του 2025 (Επαναληπτικές Δ4)

Ιδέα 1η Κατασκευής

Όταν έχουμε **συνεχή** και **μη σταθερή** συνάρτηση f ορισμένη σε **κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$ μπορούμε (εύκολα) να γράψουμε **βασικές ανισότητες**, όπως :

- Αν είναι m, M οι ακρότατες τιμές της, τότε $m < \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta-\alpha} < M$.

αφού είναι $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ με τις ισότητες να μην ισχύουν παντού, άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} m dx < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{M} dx \text{ ή } m(\beta-\alpha) < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \mathrm{M}(\beta-\alpha)$$

- Ειδικά αν είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\underbrace{f(\alpha)}_{m}<\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx}{\beta-\alpha}<\underbrace{f(\beta)}_{\mathrm{M}}$

- Ειδικά αν είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\underbrace{f(\beta)}_{m}<\dfrac{\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx}{\beta-\alpha}<\underbrace{f(\alpha)}_{\mathrm{M}}$

Παράδειγμα - Κατασκευή

Έστω $f(x)=e^x \ln x$, με $x \geq 1$, εύκολα προκύπτει ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[1,+\infty)$ άρα και στο διάστημα $\left[e,e^2\right]$, οπότε :

$$e \leq x \leq e^2 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(e) \leq f(x) \leq f\left(e^2\right) \Rightarrow e^e \leq f(x) \leq 2e^{e^2}$$

με τις ισότητες να ισχύουν μόνο στα άκρα του διαστήματος, άρα ολοκληρώνοντας :

$$\int_e^{e^2} e^e dx < \underbrace{\int_e^{e^2} f(x)dx}_{\mathrm{I}} < \int_e^{e^2} 2e^{e^2} dx$$

η οποία οδηγεί στην

$$e^e\left(e^2-e\right) < \mathrm{I} < 2e^{e^2}\left(e^2-e\right)$$ ή $$e^{e+1}(e-1) < \mathrm{I} < 2e^{e^2+1}(e-1)$$

ή τελικά στην

$$\boxed{e^{e+1} < \frac{1}{e-1}\int_e^{e^2} f(x)dx < 2e^{e^2+1}}$$

η οποία θα μπορούσε να ήταν η **ζητούμενη ανισότητα**.

Ιδέα 2η Κατασκευής (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις)

Αρκετά ενδιαφέρον είναι να δημιουργήσουμε ανισότητες, ως εξής :

Έχουμε την $m \le f(x) \le M$ αφού f συνεχής σε κλειστό διάστημα ή μια οποιαδήποτε ανισότητα προκύπτει από το πρόβλημα ή κάποια ανισότητα που είναι γνωστή στα Γενικά Μαθηματικά…

Κατόπιν **πολλαπλασιάζουμε** (ή **διαιρούμε**) με μια ποσότητα της οποίας το **ολοκλήρωμα υπολογίζεται**, για παράδειγμα $\frac{m}{e^x} \le \frac{f(x)}{e^x} \le \frac{M}{e^x}$ και τέλος

ολοκληρώνουμε κατά μέλη…

Παράδειγμα - Κατασκευή

Έχουμε τη συνάρτηση

$f(x)=x^x$, $x>0$ για την οποία $f'(x)=x^x(1+\ln x)$, $x>0$

με πίνακα μεταβολών :

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

οπότε στο διάστημα $[1,2]$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα :

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow f(1) \le f(x) \le f(2) \Rightarrow 1 \le f(x) \le 4$$

Επειδή είναι $e^x > 0$, μπορούμε να γράψουμε :

$$\frac{1}{e^x} \le \frac{f(x)}{e^x} \le \frac{4}{e^x}$$

με τις ισότητες να ισχύουν μόνο στα άκρα, άρα **ολοκληρώνοντας** παίρνουμε :

$$\int_1^2 \frac{1}{e^x}dx < \int_1^2 \frac{f(x)}{e^x}dx < \int_1^2 \frac{4}{e^x}dx$$

ή τελικά

$$\frac{e-1}{e^2} < \int_1^2 \frac{f(x)}{e^x}dx < 4\frac{e-1}{e^2} \Leftrightarrow \boxed{1 < \frac{e^2}{e-1}\int_1^2 \frac{f(x)}{e^x}dx < 4}$$

η οποία θα μπορούσε να ήταν η **ζητούμενη ανισότητα**.

Ιδέα 3η Κατασκευής

Όταν έχουμε μια **κυρτή** (ή μία **κοίλη**), τότε η C_f είναι «**πάνω**» (ή **κάτω** αντίστοιχα) από την **εφαπτομένη** της $y=\alpha x+\beta$, σε όποιο σημείο της, με **εξαίρεση βέβαια το σημείο επαφής**. Έτσι είναι $f(x)\geq \alpha x+\beta$, ή $f(x)\leq \alpha x+\beta$ για κάθε x, εκτός από το σημείο επαφής. Την τελευταία μπορούμε να την ολοκληρώσουμε κατά μέλη :

$$\int_1^2 f(x)dx > \int_1^2 (\alpha x+\beta)dx = \ldots$$

Ή την **ανάποδη** **φορά** αν f **κοίλη**

Συνήθως, γράφουμε την εφαπτομένη σε ένα από τα δύο άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης, χωρίς ωστόσο αυτό να αποτελεί πανάκεια.

Το ολοκλήρωμα του **πρωτοβάθμιου πολυωνύμου** που είναι η εφαπτομένη, **υπολογίζεται πολύ εύκολα**, ας πούμε ότι δίνει αποτέλεσμα **3** και έτσι δημιουργείται η **ζητούμενη ανισότητα**

«Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 f(x)dx > 3$»

Εννοείται ότι **αξία** έχει όταν **ΔΕΝ υπολογίζεται** το $\int_1^2 f(x)dx$

Σημαντική οδηγία είναι να γράφουμε πάντοτε την **εφαπτομένη στο σημείο καμπής**, αν υπάρχει τέτοιο. **Εκατέρωθεν** του σημείου καμπής, **αλλάζει η σχετική θέση** της C_f με την εφαπτομένη της, όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα.

Ιδέα 4η Κατασκευής

Μπορούμε να «**πειράξουμε**» την παραπάνω ανισότητα $C_f - \text{εφαπτ}$ και μετά να ολοκληρώσουμε κατά μέλη :

Από την $f(x) \geq \alpha x + \beta$, είναι εύκολα $e^x f(x) \geq e^x(\alpha x + \beta)$ και να ολοκληρώσουμε την τελευταία.

Το ολοκλήρωμα $\int_k^l e^x(\alpha x + \beta)\,dx$ υπολογίζεται εύκολα **με παραγοντική**

Ο **λύτης**, βλέπει το $\int_k^l e^x f(x)dx$, οπότε **καταλαβαίνει** ότι πρέπει

- ✓ να δημιουργήσει ανισότητα για τη συνάρτηση f
- ✓ να την πολλαπλασιάσει με e^x και τέλος
- ✓ να ολοκληρώσει στο διάστημα που ζητείται.

Η ποσότητα e^x είναι προφανώς **παράδειγμα**. Στις **εξετάσεις του 2018, στο Δ4**, ο θεματοδότης χρησιμοποίησε την ανισότητα **κυρτής – εφαπτομένης** και την **πολλαπλασίασε** επί $\sqrt{x-2}$. Τονίζω ότι **πάντα βλέπουμε** το ζητούμενο ολοκλήρωμα, **το οποίο μας οδηγεί στην κατασκευή της ανισότητας**.

Παράδειγμα (Εξετάσεις 2018 – Δ4)

Είχε δοθεί η συνάρτηση $f(x)=2e^{x-2}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι **κοίλη** στο $(-\infty,2]$, **κυρτή** στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει **σημείο καμπής** στη θέση $x_0=2$, το οποίο είχε ζητηθεί σε προηγούμενο ερώτημα, στο Δ1.

Στο **Δ4**, ζητούσε **να αποδείξετε ότι** :

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$$

Λύση

Ζητούμε $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\dfrac{32}{15}$

Η συνάρτηση f είναι **κυρτή** στο $[2,3]$ και έχει **σημείο καμπής** στη θέση $x_0 = 2$

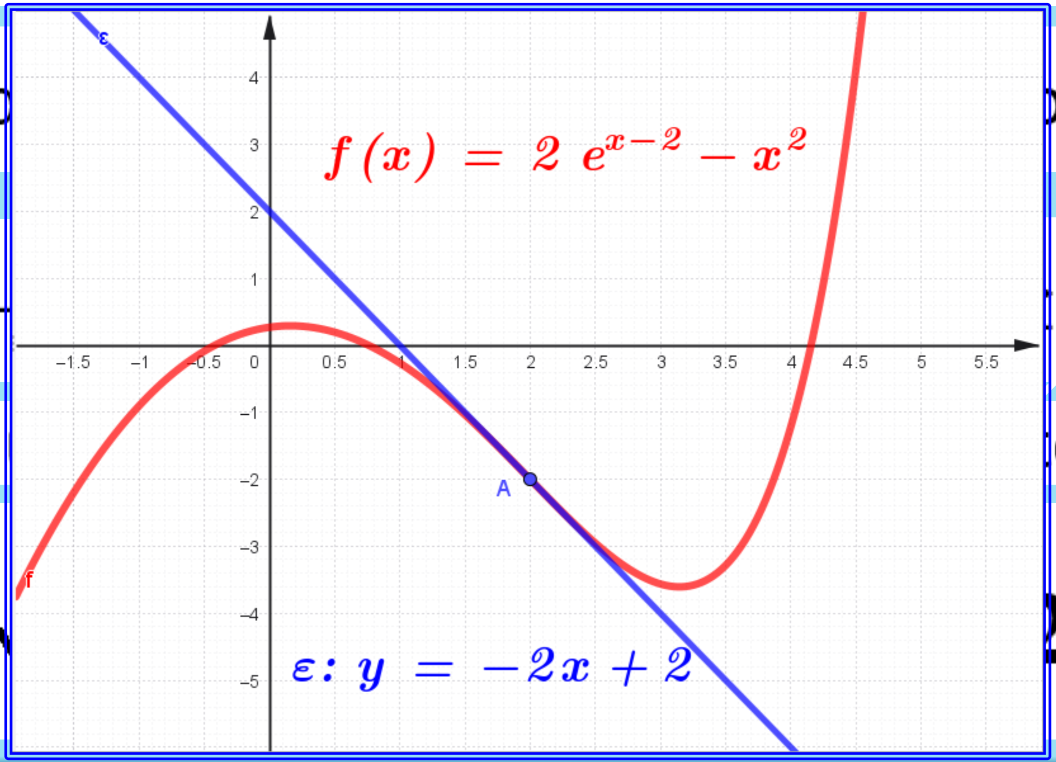
Η **εφαπτομένη** στο $x_0 = 2$, είναι η ευθεία με εξίσωση : $y = -2x + 2$.

Έτσι στο διάστημ ... λοκλήρωσης) :

$f(x) \geq -2x$ ... $\sqrt{x-2}(-2x+2)$

με την ισότητα να ... ότε ολοκληρώνοντας :

$I = \int_2^3 f(x)$ ... $2x+2)dx = J$.



Στο ολοκλήρωμα του δευτέρου μέλους $\boxed{J=\int_2^3\sqrt{x-2}\,(-2x+2)\,dx}$

θέτουμε

$\sqrt{x-2}=t\Leftrightarrow x=t^2+2$ άρα $dx=2tdt$ και

όταν $x=2\Rightarrow t=0$ και

όταν $x=3\Rightarrow t=1$ έτσι :

$$J=\int_0^1 t\left(-2\left(t^2+2\right)+2\right)2tdt=\ldots=\left[-4\frac{t^5}{5}-4\frac{t^3}{3}\right]_0^1=-\frac{32}{15}$$

Σχόλιο

Η (**πιθανή και λογική**) ερώτηση «γιατί την εφαπτομένη στο 2 και όχι στο 3 ή στο $\frac{5}{2}$ ή... ?

Δεν έχει (**προφανώς και δυστυχώς**) απάντηση... Μόνο ότι στο 2 έχουμε **καμπή**...

Ιδέα 5η Κατασκευής (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις)

Όμοια, από την ανισότητα **κυρτής** (ή **κοίλης**) με την **εφαπτομένη** της σε κάποιο σημείο της, δηλαδή την $f(x) \geq \alpha x + \beta$, **θέτοντας** για παράδειγμα όπου x το e^x, προκύπτει η $f(e^x) \geq \alpha e^x + \beta$, η οποία επίσης μπορεί να ολοκληρωθεί και να δώσει ανισότητα για το $\int_k^l f(e^x)dx$. **Τονίζεται** το γεγονός, ότι **πάντα** ο λύτης **βλέπει** το $\int_k^l f(e^x)dx$, οπότε κατασκευάζει μία ανισότητα για την f – εδώ είπαμε από την εφαπτομένη – και βάζει όπου x το e^x και ολοκληρώνει.

Εννοείται ότι μπορεί ο **θεματοδότης**, στη θέση του e^x να βάλει άλλη ποσότητα, για παράδειγμα $\ln x$. Όπως και να έχει όμως, **πάντα** θα **βλέπουμε** το $\int_k^l f(\ln x)\,dx$, οπότε μπορούμε να κινηθούμε ανάλογα.

Ιδέα 6η Κατασκευής

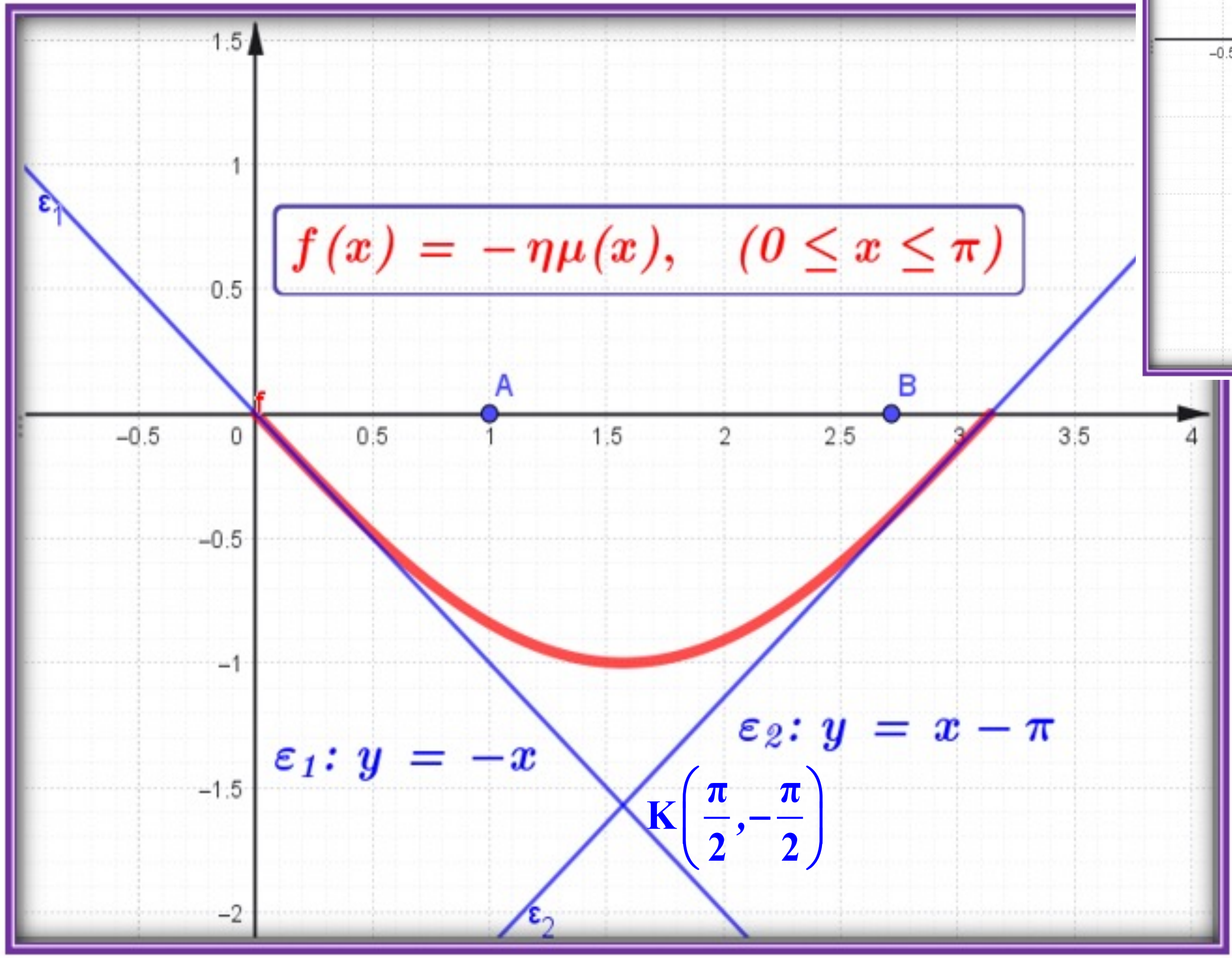
Όμοια, ο Θεματοδότης, από την $f(x) \geq \alpha x + \beta$, σε διάστημα που δεν περιέχει το 0, διαιρώντας με x, προκύπτει η $\dfrac{f(x)}{x} \geq \alpha + \dfrac{\beta}{x}$ την οποία μπορεί να ολοκληρώσει και να δημιουργήσει ανισότητα με ολοκλήρωμα.

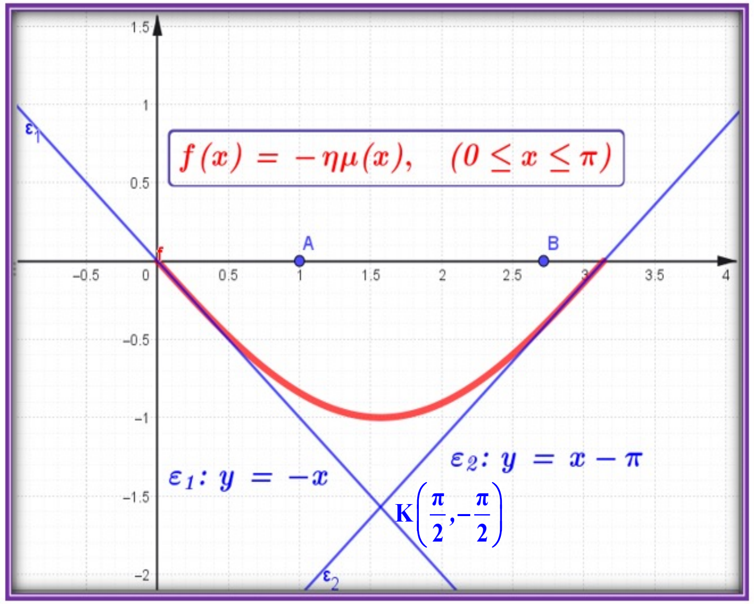
Παράδειγμα (Εξετάσεις 2017 – Γ4)

Δόθηκε η συνάρτη

ερωτήματα, είχε βρεθ

εφάπτονται της C_f σ





ι στο σχήμα :

Ζητήθηκε να ... $-\pi - 1$

Αντιμετώπιση

Ζητούμε $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-\pi-1$

Πρέπει να **δημιουργήσουμε ανισότητα** για την ποσότητα $\frac{f(x)}{x}$

Η f είναι **κυρτή**, στο διάστημα $[0,\pi]$. Άρα

για κάθε $x \in [1,e]: f(x) > x-\pi$

(αφού η ισότητα ισχύει μόνο στο π) και επειδή $x>0$ έχουμε

$\frac{f(x)}{x} > 1-\frac{\pi}{x}$, οπότε ολοκληρώνοντας :

$$I = \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx = \left[x-\pi \ln x\right]_1^e = e-\pi-1$$

(οεδ)

Αξίζει νομίζω, επειδή απευθυνόμαστε και σε μαθητές, να πούμε ότι **αν χρησιμοποιούσαμε την άλλη εφαπτομένη**, που επίσης είχαμε βρει νωρίτερα, δηλαδή αν γράφαμε :

$$f(x) > -x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)}{x} > -1$$

και ολοκληρώναμε θα βρίσκαμε

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > 1-e$$

Αν ήταν $1-e > e-\pi-1$ θα ήταν όλα καλά, δυστυχώς όμως κάτι τέτοιο **ΔΕΝ ισχύει**. Οπότε θα έπρεπε να **απορρίψουμε** αυτή την εφαπτομένη και να δουλέψουμε διαφορετικά.

Ιδέα 7η Κατασκευής (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις)

Όταν έχω **κυρτή** ή **κοίλη** συνάρτηση, τότε **ΜΕ ΑΠΟΔΕΙΞΗ**, που **λογικά θα πρέπει να υπάρχει στο προηγούμενο ερώτημα**, μπορούμε να έχουμε ότι :

✓ Αν f **κυρτή** τότε $f(x) \leq f(\alpha) + \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

ενώ

Γεωμετρική ερμηνεία

✓ Αν f **κοίλη** τότε $f(x) \geq f(\alpha) + \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$

Γεωμετρική ερμηνεία

- ✓ Σε **κυρτή** συνάρτηση ισχύει ότι $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\alpha\pi\tau o\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta} \le f(x) \le \boldsymbol{\chi o\rho\delta\acute{\eta}}$ σε διάστημα και κατόπιν ολοκλήρωση. Αν είναι **κοίλη**, οι φορές **αντιστρέφονται**.

- ✓ **Βέβαια**, ο **θεματοδότης**, μπορεί να **ολοκληρώσει** αυτές τις ανισότητες, ώστε να προκαλέσει ερώτημα Εξετάσεων, όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα.

- ✓ Είναι **θεμελιώδες** να προσέχουμε πάντοτε τα **προηγούμενα ερωτήματα**, γιατί είναι **πολύ πιθανόν** να δίνουν την **απάντηση** σε κάποιο επόμενο ερώτημα.

Παράδειγμα – Σκέψεις – κατασκευή Ερωτημάτων

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια **αρχική** της συνάρτησης $g(x)=e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f **περνά από την αρχή των αξόνων**.

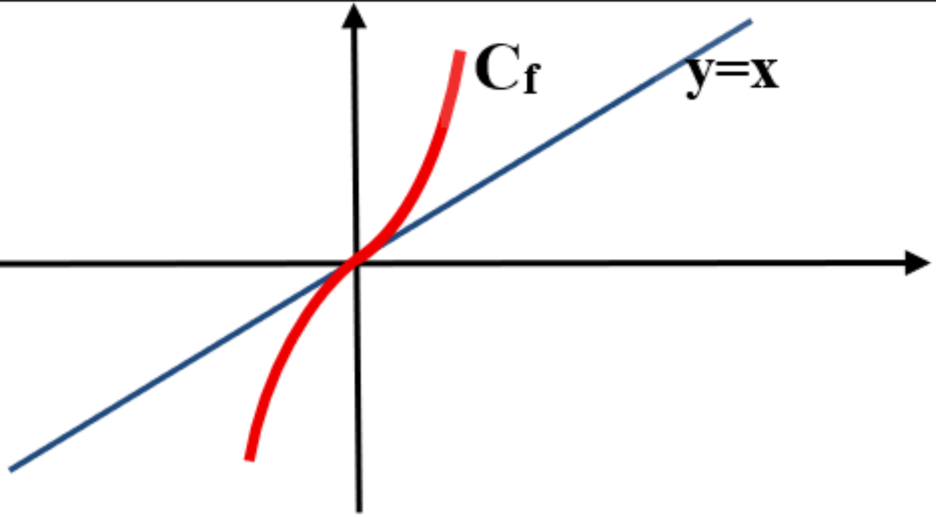
Είναι

$$f'(x)=g(x)=e^{x^2}\geq 1$$

και

$$f''(x)=g'(x)=2xe^{x^2}$$

Άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$	$f'(0)=1$	$\nearrow$
f			

Στο **σημείο καμπής** $(0,0)$ ο **ρυθμός μεταβολής** της f ως προς x ή ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** γίνεται **ελάχιστος**. Η εφαπτομένη με τον ελάχιστο δυνατό συντελεστή διεύθυνσης είναι η ευθεία $y=x$.

Αν $x\leq 0$ η $f\curvearrowright$ άρα $f(x)\leq x$, όλα είναι αρνητικά, οπότε $|f(x)|\geq|x|$ ενώ

Αν $x\geq 0$ η $f\circlearrowleft$ άρα $f(x)\geq x$, όλα είναι θετικά, οπότε $|f(x)|\geq|x|$

Συνεπώς, είναι $|f(x)|\geq|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Σχόλιο

Η παραπάνω ανισότητα, αποδεικνύεται και με χρήση του ΘΜΤ. (**πως ;** 😉)

Πιθανό λοιπόν ερώτημα, θα ήταν : Να αποδείξετε ότι $\left|f(x)\right| \geq |x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$

Προφανές επακόλουθο, είναι ότι $f^2(x) \geq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η ισότητα ισχύει μόνο στο $\mathbf{0}$, άρα ολοκληρώνοντας, έχουμε :

$$\int_0^3 f^2(x)dx > \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$

Έτσι, θα μπορούσε ο θεματοδότης να ζητήσει

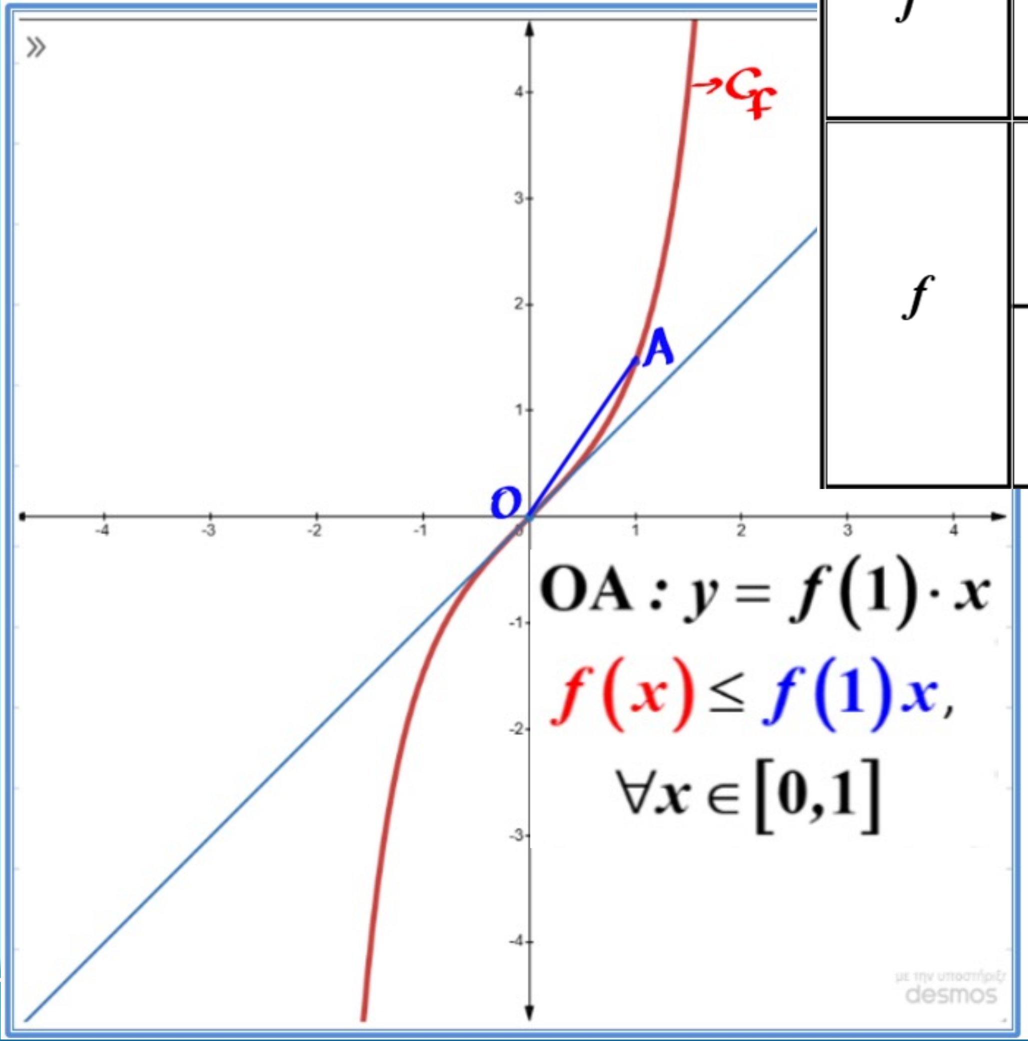
Να αποδείξετε ότι :

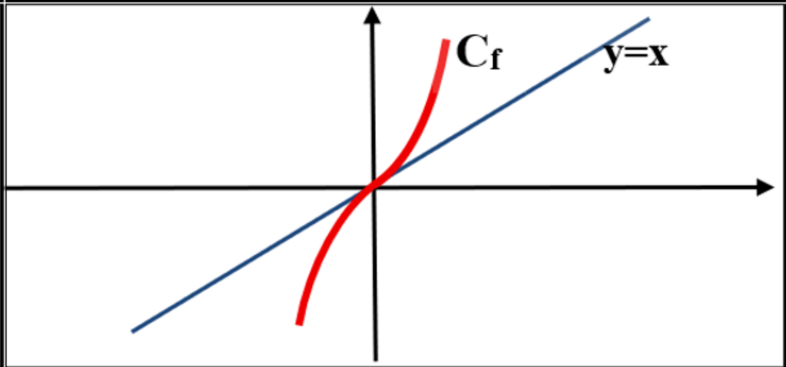
α. $\left|f(x)\right| \geq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

β. $\int_0^3 f^2(x)dx > 9$

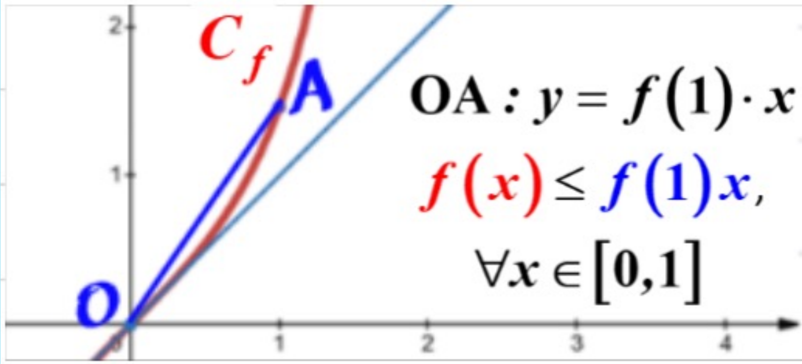
Στη συνέχεια, ένα **πιθανό ερώτημα** θα μπορούσε να είναι

Να αποδείξετε ότι : $f(x) \le f(1)x$,



x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f''(x)$	— 0 +
f'	↘ ↗ $f'(0)=1$
f	

Θεωρούμε τη συνάρτηση :



$k(x) = f(x) - f(1)x$, $x \in [0,1]$, τότε :

$k'(x) = f'(x) - f(1)$, και $k''(x) = f''(x) > 0$ στο $(0,1)$, άρα $k' \nearrow$

Είναι $k(0) = k(1) = 0$, άρα **ικανοποιούνται οι υποθέσεις** του **θεωρήματος** ***Rolle***, κατά συνέπεια υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$k'(x_0) = 0$$

Οπότε :

Μελετούμε τα πρόσημα της $k'(x)$

$$k'(x)=0=k'(x_0)\underset{'1-1'}{\overset{k'\nearrow}{\Leftrightarrow}} x=x_0$$

$$k'(x)<0=k'(x_0)\overset{k'\nearrow}{\Leftrightarrow} x<x_0$$

$$k'(x)>0=k'(x_0)\overset{k'\nearrow}{\Leftrightarrow} x>x_0$$

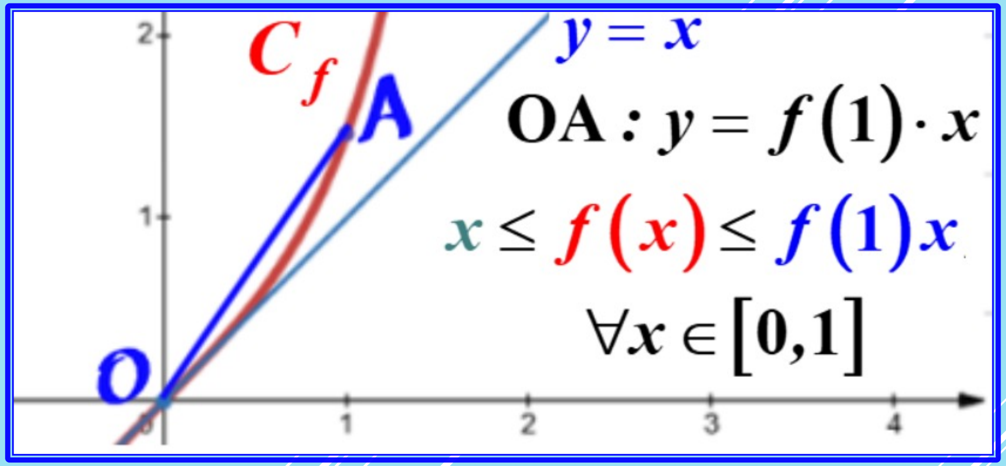
Οπότε :

x	0		x_0		1
$k'(x)$		$-$	0	$+$	
k	0	$\searrow$	$k(x_0)$	$\nearrow$	0

Δηλαδή $k(x)\leq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$, όπως θέλαμε.

Τώρα, έχουμε **δύο ανισότητες**, μία της **εφαπτομένης** και μία της **χορδής** :

Για κάθε $x \in [0,1]$: $x \leq f(x) \leq f(1)x$



με τις **ισότητες** να ισχύουν **μόνο στα άκρα**, οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε :

$$\int_0^1 x dx < \int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 f(1)xdx$$

Είναι $\int_0^1 x dx = \dfrac{1}{2}$

έτσι $\dfrac{1}{2} < \int_0^1 f(x)dx < \dfrac{f(1)}{2}$

ή τελικά $\boxed{1 < 2\int_0^1 f(x)dx < f(1)}$

η οποία θα μπορούσε να ήταν **ζητούμενη**.

Έτσι, ο **θεματοδότης**, μπορούσε να ζητήσει :

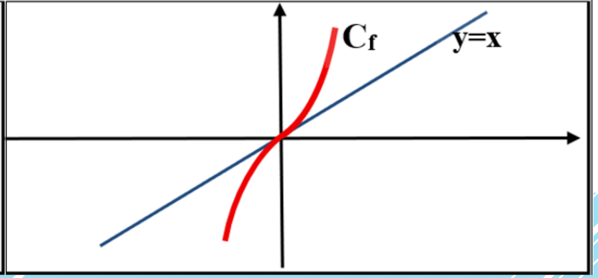
Να αποδείξετε ότι :

α. $f(x) \leq f(1)x$, για κάθε $x \in [0,1]$ και

β. $1 < 2\int_0^1 f(x)\,dx < f(1)$

Ολοκληρωμένο το θέμα, με αρκετά πλούσια ερωτήματα, είναι στη διάθεση του Παραρτήματος.

Ιδέα 8η Κατασκευής (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξε

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
f'	↘	$f'(0)=1$	↗
f			

Στην προηγούμενη εφαρμογή, όπου f ήταν η **αρχική** της σι

$x \in \mathbb{R}$, είχαμε βρει ότι $f'(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αυτό μπορεί να δώσει μια **ανισότητα με ολοκληρώματα**, την παρακάτω :

Να αποδείξετε ότι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2} dx\right| \geq |\alpha - \beta|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Αντιμετώπιση

Αφού f είναι αρχική της $g(x)=e^{x^2}$, ισοδύναμα ζητούμε

$$|f(\beta)-f(\alpha)|\geq|\alpha-\beta| \text{ ή } |f(\alpha)-f(\beta)|\geq|\alpha-\beta|$$

- Αρχικά, αν είναι $\alpha=\beta$, η αποδεικτέα είναι **φανερή** ως **ισότητα**.
- Αν τώρα $\alpha\neq\beta$, είναι $|\alpha-\beta|>0$, οπότε η αποδεικτέα γίνεται ισοδύναμα :

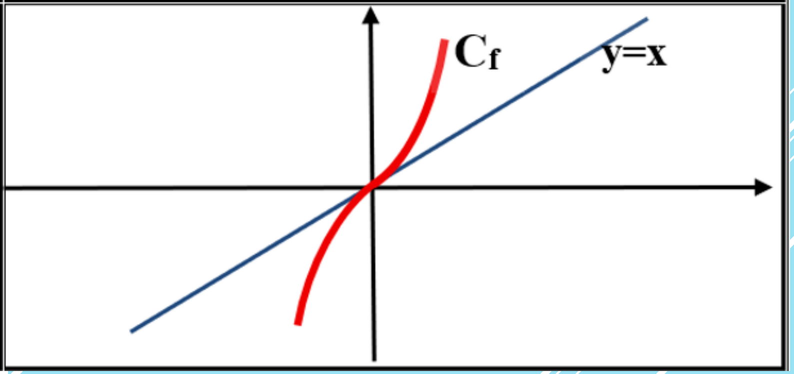
$$\frac{|f(\alpha)-f(\beta)|}{|\alpha-\beta|}\geq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|\geq 1$$

Όμως, η συνάρτηση f ικανοποιεί τις **υποθέσ**

$\left[\alpha,\beta\right]$ή $\left[\beta,\alpha\right]$ της πραγματικής ευθείας,

άρα **υπάρχει ένα τουλάχιστον** $\xi\in\left(\alpha,\right.$

$$f'(\xi)=\frac{f(\alpha)-f}{\alpha-\beta}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
f'	$\searrow$ $\quad$ $\nearrow$ $f'(0)=1$
f	

Έτσι **ισοδύναμα** ζητούμε να δείξουμε ότι $\left|f'(\xi)\right|\geq 1$

η οποία είναι **φανερή**, από το γεγονός ότι $f'(x)\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Ιδέα 9η Κατασκευής

Από τις **βασικές** : $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και την $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x>0$, τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε **χωρίς απόδειξη**, θέτοντας στις θέσεις των μεταβλητών **διάφορες ποσότητες**, προκύπτουν **ανισότητες προς ολοκλήρωση**. Για παράδειγμα :

Αν το $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ **υπολογίζεται**, τότε : $e^x \geq x+1 \xrightarrow{x:f(x)} e^{f(x)} \geq f(x)+1$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν είναι $f(x)=0$, άρα

$$\int_\alpha^\beta e^{f(x)}dx > \int_\alpha^\beta \big(f(x)+1\big)dx = \ldots$$

Εννοείται ότι αξία έχει όταν το $\int_\alpha^\beta e^{f(x)}dx$ **ΔΕΝ υπολογίζεται**.

Εφαρμογή 1η

Αν είναι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε $e^{f(x)} = e^{\sigma\upsilon\nu x} \geq \sigma\upsilon\nu x + 1$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν είναι $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, άρα :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{f(x)} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu x + 1) dx = [\eta\mu x + x]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{2}$$, οπότε :

$$\boxed{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{f(x)} dx > \pi + 2}$$

η οποία θα μπορούσε να ήταν η **ζητούμενη**.

Εφαρμογή 2η (το Δ4 των Εξετάσεων του 2025)

Δόθηκε (**προέκυπτε**) η συνάρτηση $f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$ και

στο **Δ4** ζητούσε (ουσιαστικά) **να αποδείξετε ότι :** $\boxed{\int_1^e f(x)dx > 2e - 3}$

Αντιμετώπιση

Είναι $f(x) = e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ για κάθε $x > 0$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν είναι $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

δηλαδή μόνο σε ένα σημείο, άρα ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$I=\int_1^e f(x)dx>\int_1^e\left(ln^2 x+1\right)dx=\int_1^e ln^2 xdx+\int_1^e dx=I_1+I_2$$

Υπολογίζουμε τα δύο ολοκληρώματα :

$I_1=e-2$ με **παραγοντική ολοκλήρωση** (2 φορές) ή θέτοντας $ln\,x=t$,

οπότε $x=e^t$, $dx=e^t dt$ $\quad x=1\Rightarrow t=0$ και $x=e\Rightarrow t=1$

άρα $\mathrm{I}_1=\int_0^1 t^2 e^t dt=\cdots=e-2$ $\quad I_2=e-1$, οπότε τελικά

$$\boxed{\mathrm{I}=\int_1^e f(x)dx>2e-3\text{, όπως θέλαμε.}}$$

Εφαρμογή 3η

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{I} = \int_0^3 ln\left(x^2+1\right)dx < 9$

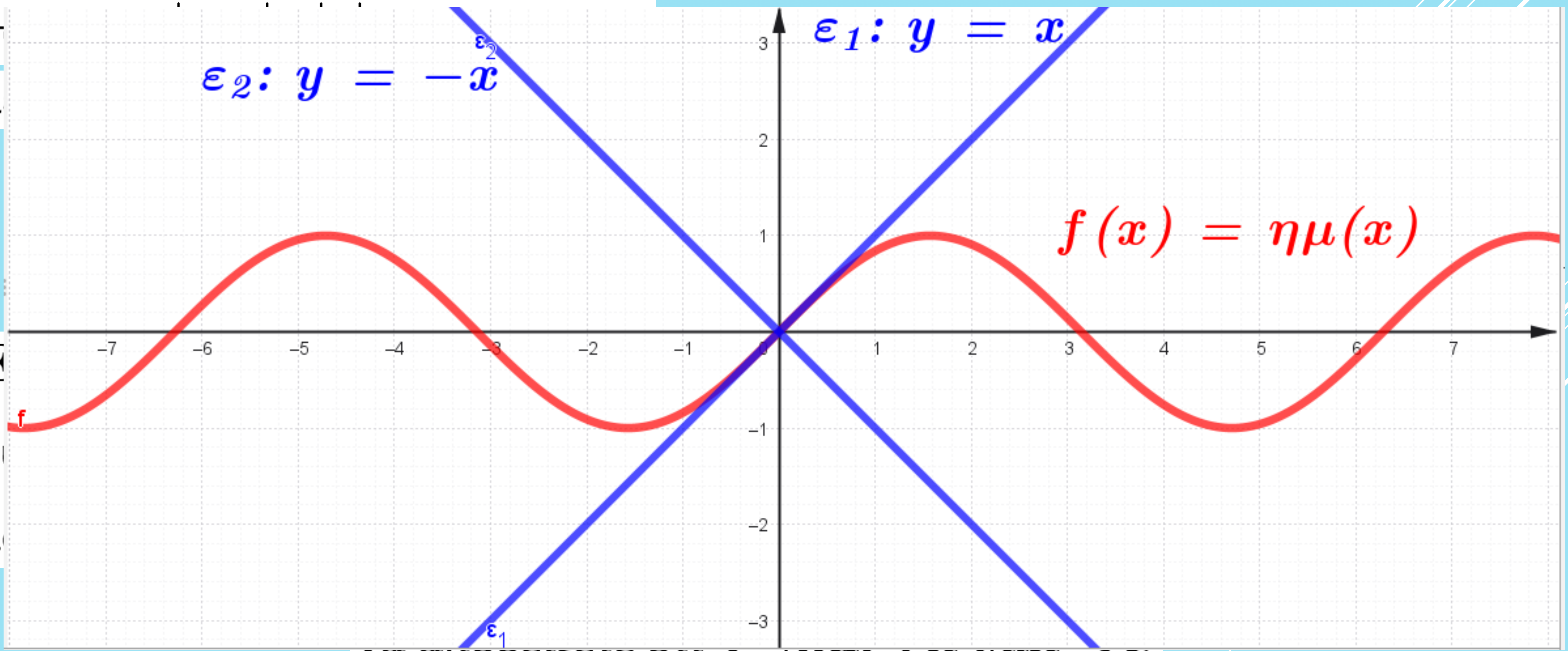
Αντιμετώπιση

Είναι $ln\left(x^2+1\right) \le x^2+1-1 = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

με την ισότητα μόνο όταν είναι $x^2+1=1 \Leftrightarrow x=0$. Ολοκληρώνοντας

$$\mathbf{I} = \int_0^3 ln\left(x^2+1\right)dx < \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 9$$, όπως θέλαμε.

Ιδέα 10η Κατασκευής



Εφαρμογή (το Δ4 των Επαναληπτικών Εξετάσεων του 2025)

Έστω $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$ και ζητήθηκε στο **Δ4**, να αποδείξετε ότι :

$$I=\int_0^1 x\cdot \eta\mu\left(1-f(x)\right)dx<\frac{7-4\sqrt{2}}{6}$$

Αντιμετώπιση

Είναι $|\eta\mu x|\le|x|\Leftrightarrow -|x|\le \eta\mu x\le |x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα μόνο στο 0.

Έτσι, **εφαρμόζοντάς** την, θέτοντας όπου x το $1-f(x)$:

$-\left|1-f(x)\right| \le \eta\mu\left(1-f(x)\right) \le \left|1-f(x)\right|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως :

$$1 \ge f(x) \Leftrightarrow 1+x \ge \sqrt{x^2+1} \overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow} 1+2x+x^2 \ge x^2+1 \Leftrightarrow 2x \ge 0,$$

που είναι φανερή στο διάστημα $[0,1]$. Συνεπώς :

$$\boxed{\mathrm{I} = \int_0^1 x \cdot \eta\mu\left(1-f(x)\right)dx}$$

$$\eta\mu\left(1-f(x)\right) \le 1-f(x) \overset{x\ge 0}{\Rightarrow} x \cdot \eta\mu\left(1-f(x)\right) \le x \cdot \left(1-f(x)\right)$$

με το ίσον μόνο στο 0, κατά συνέπεια, ολοκληρώνοντας :

$$I = \int_0^1 x \cdot \eta\mu\left(1-f(x)\right)dx < \int_0^1 x \cdot \left(1-f(x)\right)dx = J.$$

Υπολογίζουμε το

$$J=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\underbrace{\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx}_{I_1}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{2}-I_1+\frac{1}{3}$$

$$x^2+1=t\Rightarrow 2x\,dx=dt$$
$$x=0\Rightarrow t=1,$$
$$x=1\Rightarrow t=2$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\frac{2}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_1^2=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

οπότε αντικαθιστώντας, παίρνουμε

$$J=\frac{1}{2}-\frac{2\sqrt{2}-1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7-4\sqrt{2}}{6}$$

ή τελικά $\boxed{I<\frac{7-4\sqrt{2}}{6}}$ όπως θέλαμε

Ιδέα 11η Κατασκευής – Ανισότητα από προηγούμενο ερώτημα
Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις

Αν έχει προκύψει ανισότητα σε **προηγούμενο ερώτημα**, κλασικό ερώτημα **μονοτονίας** ή **συνόλου τιμών**, για **παράδειγμα** αν δοθεί η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}, x>0$$

για μελέτη, προκύπτει

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x>0$$

με πίνακα μεταβολών :

x	0 $\quad e \quad$ $+\infty$

$$\frac{\ln x}{x} \le \frac{1}{e} \Leftrightarrow e \ln x \le x \Leftrightarrow$$

$$\ln x^{e} \le \ln e^{x} \Leftrightarrow \boxed{e^{x} \ge x^{e}}$$

παρουσιάζει (**ολικό**) **μέγιστο** το $\frac{1}{e}$, οπότε $f(x) \le \frac{1}{e}$, για κάθε $x > 0$

από την οποία προκύπτει **άμεσα η ανισότητα**

$e^{x} \ge x^{e}$ για κάθε $x > 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = e$.

Η **ιδέα** εδώ είναι να **εφαρμόσει** ο **Θεματοδότης** την **παραπάνω ανισότητα** για μια (**θετική εδώ**) ποσότητα και κατόπιν να την ολοκληρώσει. Ας δούμε

Εφαρμογή 1η

Εφαρμόζοντας την ανισότητα που αποδείξαμε, την $e^x \geq x^e$ που ισχύει για κάθε $x>0$, στη θέση του x βάζουμε την θετική ποσότητα $\boxed{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}$ προκύπτει :

$$e^{\boxed{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}} \geq \left(\boxed{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}\right)^e \text{ για } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

με την ισότητα να ισχύει όταν $(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}} = e \Leftrightarrow \eta\mu x = e^e$ που είναι αδύνατη

Άρα ολοκληρώνοντας :

$$e^{\boxed{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}} \geq \left(\boxed{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}\right)^{e} \text{ για } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}\,dx > \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left((\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}\right)^{e} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x\,dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

δηλαδή τελικά μπορεί να ζητήσει να αποδείξετε ότι :

$$\boxed{2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}\,dx > \sqrt{2}}$$

Έτσι, ένα πιθανό ζητούμενο, θα μπορούσε να είναι :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x>0$

Α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς μονοτονία και ακρότατα.

Β) Να αποδείξετε ότι :

i) $e^x \geq x^e$, για κάθε $x>0$.

ii) $2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^{(\eta\mu x)^{\frac{1}{e}}}dx > \sqrt{2}$

Εφαρμογή 2η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - x\ln x$, $x > 0$.

A) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη **μονοτονία** της και να βρείτε τα **ακρότατα** και το **Σύνολο Τιμών** της.

B) Να αποδείξετε ότι : $\int_0^1 (3x^2+1)\ln(3x^2+1)\,dx > 1$.

Αντιμετώπιση

A) Είναι $f'(x) = -\ln x$, $x > 0$, οπότε :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$f(1)=1$	$\searrow$

Άρα $f(x)\le 1$, για κάθε $x>0$ ή

$$x - x\ln x \le 1 \Leftrightarrow x\ln x \ge x-1\text{, για κάθε } x>0$$

Είναι $f \nearrow$ στο $(0,1]$, $f\searrow$ στο $[1,+\infty)$ με σύνολο τιμών $(-\infty,1]$

Ζητούμε

$$\int_0^1 (3x^2+1)\ln(3x^2+1)\,dx > 1$$

B) Είναι : $\square \ln \square \geq \square - 1$, αρκεί $\square > 0$.

Θέτοντας όπου $\square$ την θετική ποσότητα $3x^2+1$, έχουμε :

$$(3x^2+1)\ln(3x^2+1) \geq 3x^2+1-1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x=0$. Έτσι :

$$I = \int_0^1 (3x^2+1)\ln(3x^2+1)\,dx > \int_0^1 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_0^1 = 1$$

που είναι η ζητούμενη.

Ιδέα 12η Κατασκευής – Ανισότητα από ανάπτυγμα τετραγώνου

Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις

Έστω η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Να αποδείξετε ότι : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx+\frac{\pi}{16}\geq\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x\,dx$

Αντιμετώπιση

Παρατηρούμε ότι μοιάζει με **ταυτότητα** ! Ζητούμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)\frac{\eta\mu x}{2}\right]dx+\frac{\pi}{16}\geq 0$$

Αν μπορούσα να γράψω…

$$\frac{\pi}{16}=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x\,dx$$

$$\mathrm{I}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'\,dx=$$

$$=-\left[\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\eta\mu^2 x\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\mathrm{I}\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{I}\Rightarrow \mathrm{I}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}\mathrm{I}=\frac{\pi}{16}}$$

Έτσι ζητούμε :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f^2(x)-2f(x)\frac{\eta\mu x}{2}+\frac{\eta\mu^2 x}{4}\right]dx\geq 0\Leftrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\frac{\eta\mu x}{2}\right]^2dx\geq 0$$

που είναι **προφανής**.

Σχόλιο 1ο

Αν ήταν **δεδομένη η σχέση**, αλλά με την «**ανάποδη**» ανισότητα, θα μπορούσε να οδηγήσει στον **προσδιορισμό του τύπου της συνάρτησης**… **Εξηγούμαι** :

Έστω η συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx+\frac{\pi}{16}\leq\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\eta\mu x\,dx$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

Ακριβώς όπως πριν, καταλήγουμε

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)-\frac{\eta\mu x}{2}\right]^2 dx \leq 0$$

άρα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\underbrace{f(x)-\frac{\eta\mu x}{2}}_{h(x)}\right]^2 dx = 0$$

Αν υπήρχε έστω ένα $x_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $h(x_0) \neq 0$, τότε θα ήταν

$[h(x)]^2 \geq 0$ και όχι παντού 0, άρα $\int_0^{\frac{\pi}{2}}[h(x)]^2 dx > 0$, που είναι **άτοπο**.

Άρα :

Για κάθε $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι $h(x)=0$ ή $f(x)=\frac{\eta\mu x}{2}$, $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

Σχόλιο 2ο

Επέλεξα αυτό το παράδειγμα, για να δείξω τον **τρόπο υπολογισμού** του ολοκληρώματος $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x\, dx$, **χωρίς τους τύπους αποτετραγωνισμού** που είναι – ως γνωστόν – **Εκτός Ύλης**.

Θα ήθελα εδώ να πω, ότι με **παραγοντική ολοκλήρωση** επίσης, υπολογίζονται τα **ολοκληρώματα** της μορφής $I = \int_\kappa^\lambda \eta\mu(\alpha x)\sigma\upsilon\nu(\beta x)\, dx$. Το **Σχολικό βιβλίο** έχει αντίστοιχη άσκηση, αλλά λέει «***να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα με τη βοήθεια των τύπων***» και ακολουθούν οι τύποι **μετασχηματισμού γινομένων σε αθροίσματα** που είναι **Εκτός Ύλης** από τη Β΄ τάξη του Λυκείου.

Ιδέα 13η (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις)

Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε : $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

Η **απόδειξη**, είναι μάλλον απλή : Από την **Α΄ Τάξη του Λυκείου** γνωρίζουμε ότι

$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$-\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$$

ή $$\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \le \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$$ όπως θέλαμε (οεδ)

Ιδέα 14η (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις)

Αν μπορεί να μελετηθεί η **μονοτονία μιας συνάρτησης** g που **περιέχει τη συνάρτηση** f, τότε μπορούμε, **δημιουργώντας ανισότητα για τη συνάρτηση** g, μετά να **λύσουμε ως προς** f και με τον τρόπο αυτό να **δημιουργήσουμε ανισότητα για τη συνάρτηση** f. Εξηγούμαι :

Εφαρμογή

Αν έχουμε δεδομένο ότι : για κάθε $x>1$: $xf'(x)\ln x > f(x)$, προκύπτει εύκολα **– θα ήταν ζητούμενο –** ότι

η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{\ln x}$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $(1,+\infty)$, οπότε

$$e \le x \le e^2 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(e) \le g(x) \le g\left(e^2\right) \Rightarrow f(e) \le \frac{f(x)}{\ln x} \le \frac{f\left(e^2\right)}{2}$$

και επειδή είναι $\ln x > 0$ για κάθε $x \in \left[e, e^2\right]$ πολλαπλασιάζοντας με $\ln x$:

$$f(e)\ln x \le f(x) \le \frac{f\left(e^2\right)}{2}\ln x.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε :

$$\int_e^{e^2} f(e)\ln x\,dx \le \int_e^{e^2} f(x)\,dx \le \int_e^{e^2} \frac{f\left(e^2\right)}{2}\ln x\,dx$$

και επειδή $\int_e^{e^2} \ln x\,dx = e^2$, τελικά προκύπτει η

$$\boxed{e^2 f(e) \leq \int_e^{e^2} f(x)\,dx \leq \frac{e^2 f\left(e^2\right)}{2}}$$

η οποία θα μπορούσε να ήταν η **ζητούμενη**.

Έτσι, ένα πιθανό ζητούμενο, θα μπορούσε να είναι :

Έστω η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(1,+\infty)$ με $x\cdot f'(x)\ln x > f(x)$, για κάθε $x>1$.

Να αποδείξετε ότι :

Α) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $x>1$ είναι γνησίως αύξουσα.

Β) $e^2 f(e)\le\int_e^{e^2} f(x)\,dx\le\dfrac{e^2 f(e^2)}{2}$.

Ιδέα 15η (Δεν έχει εμφανιστεί σε Εξετάσεις)

Hermite – Hadamard's Inequality

Η «διάσημη» ανισότητα Hermite – Hadamard's, για το Λύκειο, μπορεί να **διατυπωθεί και να ζητηθεί**, ως ακολούθως :

Αν f είναι μία **δύο φορές παραγωγίσιμη** στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f''(x)>0$, τότε :

A) Να μελετήσετε ως προς τη **μονοτονία** και να βρείτε τη **μέγιστη** και την **ελάχιστη** τιμή της συνάρτησης που ορίζεται ως :

$$\varphi(x)=f(x)+f(\alpha+\beta-x) \text{ στο διάστημα } [\alpha,\beta]$$

B) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)<\dfrac{1}{\beta-\alpha}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

Απόδειξη

Α) Κατ' αρχάς, είναι φανερό ότι : $\alpha \le \alpha+\beta-x \le \beta$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Η **μελέτη** της συνάρτησης φ είναι **σχετικά απλή** :

$\varphi'(x) = f'(x) - f'(\alpha+\beta-x)$ και αφού είναι f' **γνησίως αύξουσα** :

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\alpha+\beta}{2}, \text{ άρα είναι } \varphi \searrow \text{ στο } \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\alpha+\beta}{2}, \text{ άρα είναι } \varphi \nearrow \text{ στο } \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$$

Έτσι έχουμε τον πίνακα :

x	α		$\frac{\alpha+\beta}{2}$		β
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	$f(\alpha)+f(\beta)$	$\searrow$	$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$	$\nearrow$	$f(\alpha)+f(\beta)$

Η συνάρτηση φ παρουσιάζει (**ολικό**) **μέγιστο** στις θέσεις α και β το $f(\alpha)+f(\beta)$ και (**ολικό**) **ελάχιστο** στο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ το $2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Β) Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$:

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le \varphi(x) \le f(\alpha)+f(\beta) \quad \text{ή}$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \le f(x)+f(\alpha+\beta-x) \le f(\alpha)+f(\beta)$$

Οι ισότητες στην τελευταία, δεν ισχύουν παντού, παρά μόνο σε μεμονωμένα σημεία, άρα ολοκληρώνοντας :

$$\int_\alpha^\beta 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx < \int_\alpha^\beta \left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]dx < \int_\alpha^\beta \left[f(\alpha)+f(\beta)\right]dx \qquad (1)$$

Είναι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx = 2(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

και

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]dx = (\beta-\alpha)\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$$

ενώ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx \xrightarrow[\substack{x=\alpha\to\psi=\beta\\ x=\beta\to\psi=\alpha}]{\substack{\alpha+\beta-x=\psi\\ -dx=d\psi}} -\int_{\beta}^{\alpha} f(\psi)\,d\psi = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

Τελικά από τη σχέση (1)

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx < \int_{\alpha}^{\beta}\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]dx < \int_{\alpha}^{\beta}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]dx}$$

$$2(\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<2\int_\alpha^\beta f(x)dx<(\beta-\alpha)\left[f(\alpha)+f(\beta)\right],$$

η οποία οδηγεί άμεσα στη ζητούμενη :

$$\boxed{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx<\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}}$$

Σχόλιο

Η παραπάνω ανισότητα, είναι **πασίγνωστη**! Εφαρμόζεται αν η συνάρτηση f είναι **κυρτή** ή **κοίλη**. Για το Λύκειο, πρέπει να δίνεται (ή να προκύπτει) ότι $f''(x)>0$ για τις κυρτές και $f''(x)<0$ για τις κοίλες, σύμφωνα με την Ύλη. Απλά στην περίπτωση της **κοίλης**, όλες οι φορές στην παραπάνω ανισότητα είναι «**ανάποδα**»

Ευχαριστώ θερμά
για την προσοχή σας

Εύχομαι από καρδιάς Υγεία και Τύχη σε όλους μας.
Και στα παιδιά καλή επιτυχία στις επικείμενες Εξετάσεις...